Целочисленные неравенства

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 20 марта.

Базовый уровень

1. Решите уравнения:

(а) $x^2 + x + 3 = y^2$ в натуральных;

(б) $9x^2 + 9x + 7 = y^2$ в целых;

(в) $2021^{2022} + 30^{2022} = y^2$ в натуральных;

(г) $\dfrac{(ab-1)(ac-1)}{bc} = y^2$ в натуральных.

2. Даны различные натуральные числа a и b, делящиеся на натуральное число n. Докажите, что $|a^2 - b^2| \geqslant 3n^2$.

3. Найдите все натуральные m и n такие, что

(а) числа $n+3$ и $4n+1$ являются квадратами натуральных чисел;

(б) числа $m^2 + n$ и $n^2 + m$ являются квадратами натуральных чисел.

4. Ученик за 11 лет в школе получил 2027 оценок (каждая из них — 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое всех этих оценок — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более 337 раз.

Продвинутый уровень

5. Натуральные числа $a > b$ таковы, что a делится на b, и $a+1$ делится на $b+1$. Докажите, что $a > b^2$.

6. Назовём *сложностью* натурального числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность числа $2^5 \cdot 3 \cdot 11^4$ есть $5 + 1 + 4 = 10$). Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

(а) не больше, чем у n;

(б) меньше, чем у n?

7. Петя записал на доске 3 натуральных числа. Известно, что для записи чисел на доске он использовал 2026 цифр. Какое количество цифр может быть использовано для записи квадратов Петиных чисел?

8. Натуральные числа a, b, c, d попарно различны и $a + b \mid a + c$, $d + c \mid d + a$. Известно, что $a \geqslant 100$. Найдите наименьшее возможное значение для b.

9. Пусть a и b — некоторые положительные числа. Для каждого натурального n число $\sqrt{an+b}$ округлили до ближайшего целого. Могли ли все округления быть в одну сторону?

10. Пусть p и q — последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что число $p+q$ представимо в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.