Целочисленные неравенства

Выгадывание единицы. Ключевая идея целочисленных неравенств: если $a > b$, то $a \geqslant b + 1$ при целых a и b.

Оценка частного. Делимость позволяет написать следующие оценки:

- если $a \vdots b$, то или $a = 0$, или $|a| \geqslant |b|$;
- если $a \vdots b$, то $a = 0$, $|a| = |b|$, или $|a| \geqslant 2|b|$;
- если $a \vdots b$ и $|b| < \dfrac{|a|}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $|b| \leqslant \dfrac{|a|}{n+1}$.

Зажим между. Идея заключается в том, что если число зажато соседними членами некоторой возрастающей последовательности (функции в целых точках), то это число не может встречаться в данной последовательности. Такими последовательностями часто выступают кратные некоторому числу b, точные квадраты, степени двойки, степени десятки и т.д.

Примеры использования:

- если $n < \left|\dfrac{a}{b}\right| < n + 1$, где n натуральное, то $a \not\vdots b$;
- если $k^2 < x < (k+1)^2$, где k натуральное, то x не является точным квадратом;
- найдётся «большое» k, что $(k+1)^2 - k^2 > C$, где C — заданная константа;
- если $2^k < x < y < 2^{k+1}$, где k натуральное, то $\dfrac{y}{x} < 2$;
- если в натуральном числе x ровно k цифр, то $10^{k-1} \leqslant x < 10^k$.

Задачи для разбора

1. Три натуральных числа a, b и c таковы, что сумма любых двух из них кратна третьему. Какие значения может принимать дробь $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$?

2. Докажите, что если $a > b$ и $a, b \in \mathbb{N}$, то НОД$(a, b) \leqslant \min\{b, a-b\}$.

3. Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} < \dfrac{e}{f}$, при этом $be = af + 1$. Докажите, что $d \geqslant b + f$.

4. При каких натуральных n число

(а) $n^2 + 2n + 3$;

(б) $n^2 + 5n + 7$;

(в) $4n^2 + 9n + 1$

будет точным квадратом?

5. Можно ли отметить в ряду натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа?

6. Найдите все такие натуральные $n \geqslant 4$, что $n-1$ делится на $[\sqrt{n}]+1$, а $n+1$ делится на $[\sqrt{n}]-1$.

7. Натуральные числа a, b, c таковы, что все числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ являются степенями двойки. Докажите, что какие-то два из чисел a, b, c равны.

8. Будем называть натуральное число *красивым*, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?