Элементарные идеи в неравенствах

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 27 февраля.

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень

1. Известно, что $a+b>c+1$, $a+c>d+1$, $a+d>b+1$. Докажите, что $a>1$.

2. В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни-Пух?

3. Докажите, что при любом натуральном n верно, что

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}.$$

4. На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки $x^5<y^8<y^3<x^6$, лежит число 0?

Продвинутый уровень

5. Докажите, что если числа x и y удовлетворяют неравенству $y^3x+1<x+y^3$, то $x^3y+1<y+x^3$.

6. Положительные числа a,b,x,y таковы, что $ab\geqslant ax+by$. Докажите, что $x+y$ не превосходит наибольшего из чисел a и b.

7. Даны числа $a_1,a_2,\ldots,a_n\in(0,1)$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{1-a_2}+\frac{a_2}{1-a_3}+\ldots+\frac{a_n}{1-a_1}>a_1+\ldots+a_n.$$

8. Существуют ли 2013 различных натуральных чисел таких, что сумма каждых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

9. Положительные числа a и b таковы, что $a-b=\dfrac{a}{b}$. Что больше, $a+b$ или ab?

10. Для любых положительных a,b,c докажите неравенство

$$1\leqslant\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\leqslant 2.$$