

Процессы

10 ноября 2025 г.

Определение. *Инвариант* — некий неизменный параметр в процессе (например, сумма, произведение, периметр, площадь, делимость на некоторое число и т.п.).

1. Круг разделён на шесть секторов, пронумерованных числами от 1 до 6, в каждом из которых лежит столько фишек, какой номер у сектора. За один ход разрешается снять по одной фишке с двух любых соседних секторов. Можно ли сделать количества фишек во всех секторах равными 0?
2. На каждой клетке-треугольничке треугольной доски со стороной 5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и приземляются на соседние (по стороне) клетки этой доски. Докажите, что тогда найдутся по крайней мере 5 пустых клеток.
3. Дан выпуклый n -угольник. Петя и Вася по очереди (начинает Вася) делают ходы по следующим правилам: за ход необходимо провести диагональ n -угольника, не пересекающую диагонали, проведённые на предыдущих ходах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
4. Набор чисел a, b, c каждую секунду заменяется на $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. В начале имеется набор чисел 2023, 2024, 2025. Может ли через некоторое время получиться набор:
(а) 2022.5, 2024, 2025.5;
(б) 2023, 2025, 2026;
(в) 2021, 2024, 2027?
(г) Какие наборы вообще могут получиться?
5. На доске написаны натуральные числа от 1 до 101. Разрешается стереть любые два числа a, b и записать вместо них одно число $F(a, b)$. Процесс продолжается, пока не останется одно число. Чему оно может быть равно, если:
(а) $F(a, b) = a + b$;
(б) $F(a, b) = a + b - 1$;
(в) $F(a, b) = ab$;
(г) $F(a, b) = ab + a + b$?
6. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 2025$. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске стали нулями?

7. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

Определение. Перестановкой множества $\{1, 2, \dots, n\}$ называется любая последовательность a_i элементов этого множества.

Определение. Пара чисел $a_i > a_j$ образует *инверсию* в перестановке, если $i < j$.

Определение. Чётностью перестановки называется чётность числа инверсий в ней.

Например, в перестановке $(3\ 1\ 5\ 2\ 4)$ четыре инверсии: $(3\ 1)$, $(3\ 2)$, $(5\ 2)$, $(5\ 4)$, поэтому данная перестановка чётная.

Определение. Обмен двух элементов называется *транспозицией*.

Свойство. Транспозиция меняет чётность перестановки.

Свойство. Сдвиг по циклу длины k можно сделать с помощью $k - 1$ транспозиций, поэтому сдвиг по циклу нечётной длины сохраняет чётность перестановки, а сдвиг по циклу чётной длины меняет чётность перестановки.

Свойство. Любую перестановку можно представить в виде нескольких непересекающихся циклических сдвигов.

Из перестановки $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ можно получить перестановку $(6\ 1\ 3\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5)$, сдвинув по циклу следующие группы элементов: $(1\ 2\ 6)$, $(4\ 7)$, $(5\ 8)$. Цикл длины три можно получить с помощью двух транспозиций (обменять 2 и 6, а затем 1 и число 6, стоящее на месте числа 2), циклы длины два сами являются транспозициями. Таким образом, перестановка $(6\ 1\ 3\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5)$ должна быть чётной, т.к. получена с помощью чётного (четыре) числа транспозиций. Действительно, в этой перестановке двенадцать инверсий: $(6\ 1)$, $(3\ 2)$, $(6\ 2)$, $(7\ 2)$, $(8\ 2)$, $(6\ 3)$, $(6\ 4)$, $(7\ 4)$, $(8\ 4)$, $(6\ 5)$, $(7\ 5)$, $(8\ 5)$.

8. В городе разрешены только тройные обмены квартир (т.е. А переезжает в квартиру В, В — в С, С — в А). Смогут ли два человека поменяться квартирами?