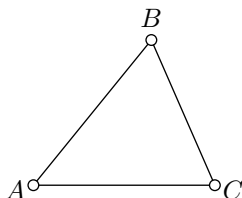


Равные треугольники

Определение.

Треугольником называется геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.



Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — *сторонами* треугольника.

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный лучами AB и AC . Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C .

Даны три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой. Треугольник ABC обозначаются $\triangle ABC$. Этот же треугольник можно обозначить по-другому: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.

A , B и C — *вершины* треугольника.

AB , BC , CA — *стороны* треугольника.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — *углы* треугольника.

$\angle B$ — *угол, противолежащий стороне AC .*

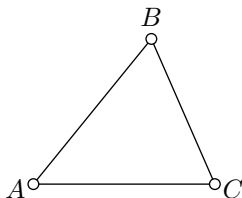
$\angle A$ и $\angle C$ — *углы, прилежащие к стороне AC .*

AC — *сторона, противолежащая углу B .*

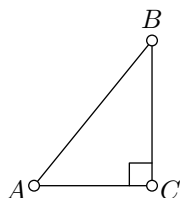
AB и AC — *стороны, прилежащие к углу A .*

Определение.

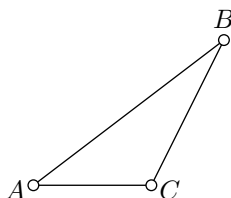
Треугольник называют *остроугольным*, если все его углы острые.

**Определение.**

Треугольник называют *прямоугольным*, если один из его углов прямой.

**Определение.**

Треугольник называют *тупоугольным*, если один из его углов тупой.



Определение.

Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить наложением.



Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Определение.

Те стороны, и те углы, которые совмещаются при наложении равных треугольников называются *соответственными*.

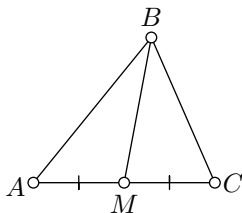
На рисунке стороны AC и A_1C_1 , углы A и A_1 — соответственные.

На рисунке равные стороны отмечают одинаковым количеством чёрточек, а равные углы — одинаковым количеством дужек.

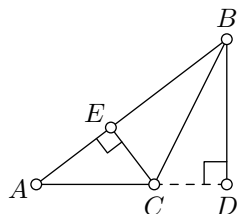
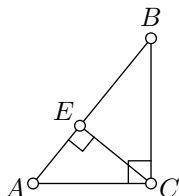
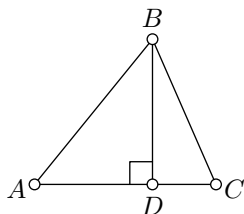
В равных треугольниках против соответственных углов лежат соответственные углы, и наоборот: против соответственных углов лежат соответственные стороны.

Определение.

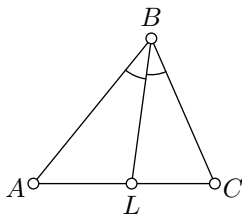
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.

**Определение.**

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.

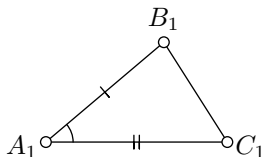
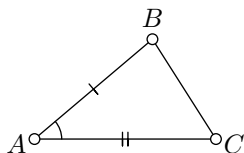
**Определение.**

Биссектрисой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делящий соответствующий угол пополам.



Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Задача 1.

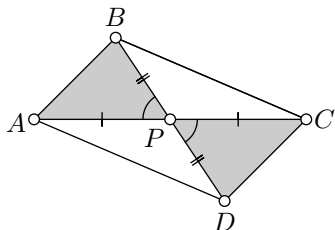
Отрезки AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что P является серединой каждого из отрезков AC и BD .

(а) Докажите, что $AB = CD$.

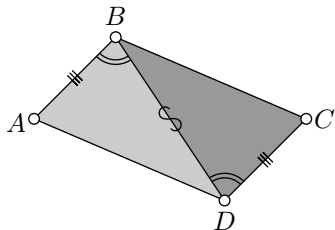
(б) Докажите, что треугольники ABD и CDB равны.

Решение:

(а) Треугольники ABP и CDP равны по первому признаку ($AP = PC$, $BP = PD$ и $\angle APB = \angle CPD$.) Следовательно, $AB = CD$.

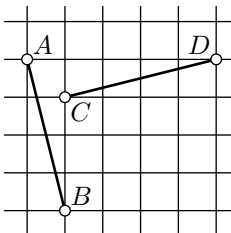


(б) Поскольку $\triangle ABP = \triangle CDP$ равны, то $AB = CD$ и $\angle ABD = \angle CDB$. Сторона BD общая для треугольников ABD и CDB . Поэтому треугольники ABD и CDB равны по первому признаку.

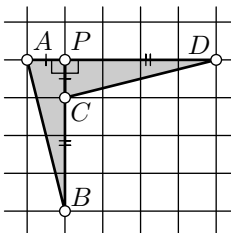


Задача 2.

На клетчатой бумаге нарисовали отрезки AB и CD так, как показано на рисунке. Докажите, что они равны.

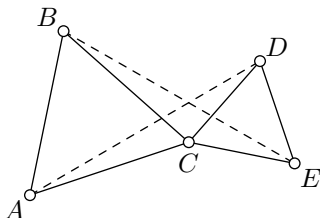
**Решение:**

Отметим на рисунке точку P . Тогда треугольники ABP и CDP равны по первому признаку ($AP = PC = 1$, $BP = PD = 4$ и $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$.) Следовательно, $AB = CD$.



Задача 3.

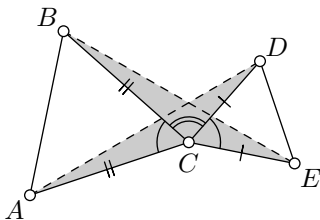
Два правильных треугольника ABC и CDE имеют общую вершину (см. рис). Докажите, что отрезки AD и BE равны.

**Решение:**

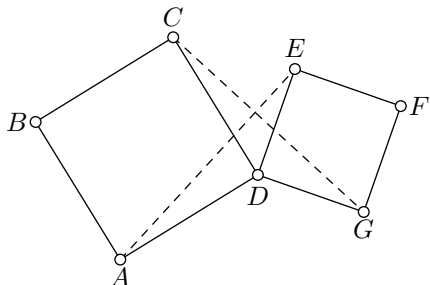
Поскольку треугольники ABC и CDE правильные, то $AC = BC$, $CD = CE$ и $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$. Поэтому

$$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD = \angle BCE.$$

Следовательно, треугольники ACD и BCE равны по первому признаку ($AC = BC$, $CD = CE$ и $\angle ACD = \angle BCE$). Таким образом, $AD = BE$.



Задача 4. Два квадрата $ABCD$ и $DEFG$ имеют общую вершину (см. рис). Докажите, что отрезки AE и CG равны.

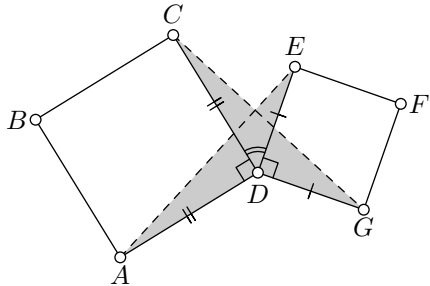


Решение:

Поскольку $ABCD$ и $DEFG$ — квадраты, то $AD = CD$, $DE = DG$ и $\angle ADC = \angle EDG = 90^\circ$. Поэтому

$$\angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = \angle EDG + \angle CDE = \angle CDG.$$

Следовательно, треугольники ADE и CDG равны по первому признаку ($AD = CD$, $DE = DG$ и $\angle ADE = \angle CDG$). Таким образом, $AE = CG$.



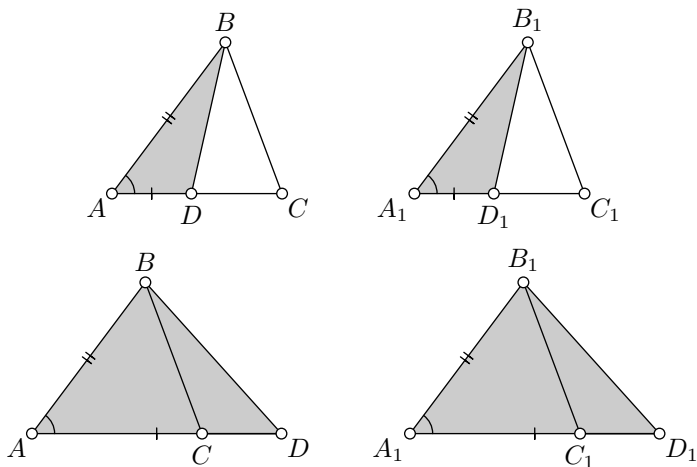
Задача 5.

В равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ на лучах AC и A_1C_1 отложены равные отрезки AD и A_1D_1 соответственно. Докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$; BCD и $B_1C_1D_1$.

Решение:

Поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $AB = A_1B_1$ и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$. По условию $AD = A_1D_1$. Тогда треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по первому признаку.

Аналогично доказывается равенство треугольников BCD и $B_1C_1D_1$. Поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $BC = B_1C_1$ и $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ (на верхнем рисунке эти углы совпадают с равными углами $\angle BCA$ и $\angle B_1C_1A_1$, а на нижнем — являются смежными к ним). Из условия имеем $CD = |AC - AD| = |A_1C_1 - A_1D_1| = C_1D_1$ (на верхнем рисунке — $CD = AC - AD = A_1C_1 - A_1D_1 = C_1D_1$, а на нижнем — $CD = AD - AC = A_1D_1 - A_1C_1 = C_1D_1$). Тогда треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по первому признаку.



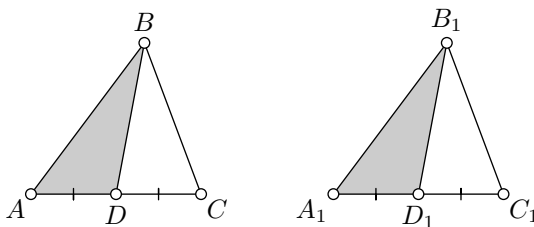
Задача 6.

Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к соответственным сторонам, равны.

Решение:

Это частный случай задачи 5.

Рассмотрим равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и медианы BD и B_1D_1 в них. Тогда D и D_1 — середины сторон AC и A_1C_1 соответственно. Поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $AC = A_1C_1$. Поэтому $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = A_1D_1$. Значит, по задаче 5 треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по первому признаку, откуда $BD = B_1D_1$.

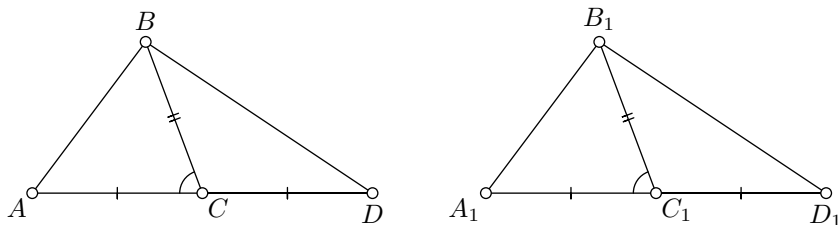


Задача 7. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углам, которые образует медиана с этой стороной.

Решение:

Это частный случай задачи 5.

Рассмотрим треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, в которых равны стороны AD и A_1D_1 , медианы BC и B_1C_1 и углы $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Тогда C и C_1 — середины равных сторон AD и A_1D_1 соответственно. Поэтому $AC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}A_1D_1 = A_1C_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку, и по задаче 5 треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, что и требовалось доказать.

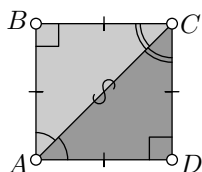


Задача 8.

Докажите, что в квадрате диагональ является биссектрисой углов, из которых она проведена.

Решение:

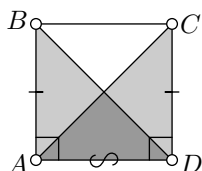
Треугольники ABC и ADC равны по первому признаку ($AB = AD$, $BC = CD$, как стороны квадрата, и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$.) Следовательно, равны соответственные углы в этих треугольниках: $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle DCA$. Последнее и означает, что CA является биссектрисой углов A и C квадрата $ABCD$.

**Задача 9.**

Докажите, что в квадрате диагонали равны.

Решение:

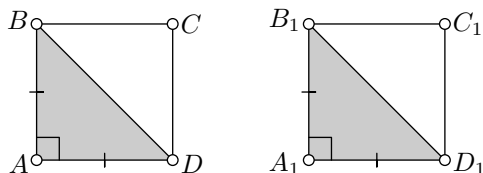
Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку ($AB = CD$, как стороны квадрата, AD — общая и $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$.) Следовательно, $AC = BD$.

**Задача 10.**

Докажите, что если у двух квадратов равны стороны, то у них равны и диагонали.

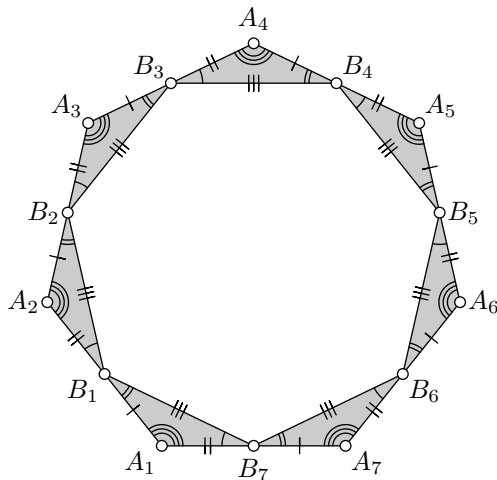
Решение:

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по первому признаку ($AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, как равные стороны квадратов, и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1 = 90^\circ$). Следовательно, $BD = B_1D_1$.



Задача 11. *Правильный многоугольник* — это выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника образуют правильный многоугольник.

Решение: Рассмотрим правильный многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ и середины его сторон $B_1, B_2, \dots, B_n$ (на рисунке правильный семиугольник и середины его сторон). По условию у него равны все углы: $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \dots = \angle A_n$. Поскольку у правильного многоугольника равны все стороны, то и их половинки тоже равны. Треугольники $A_2B_2B_1$ и $A_3B_3B_2$ равны по первому признаку ($A_2B_2 = A_3B_3$, $A_2B_1 = A_3B_2$, как половинки равных сторон, и $\angle A_2 = \angle A_3$). Тогда $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично доказывается, что все остальные треугольники (см. рис.) равны друг другу, и все оставшиеся стороны многоугольника равны $B_1B_2B_3 \dots B_n$ равны друг другу. Осталось доказать, что все углы равны друг другу. Это несложно понять, отметив равные углы в равных треугольниках.

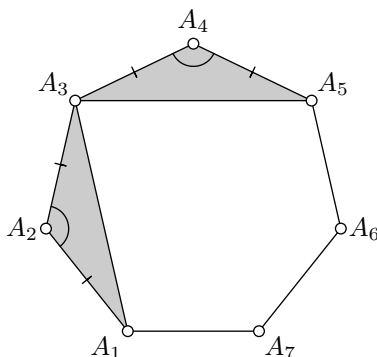


Задача 12. *Правильный многоугольник* — это выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Докажите, что

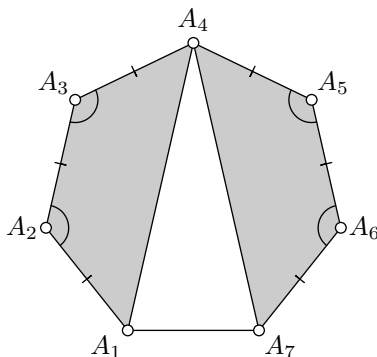
- (а) все «меньшие» диагонали равны,
- (б) все «большие» диагонали равны.

Решение:

(а) Треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_3A_4A_5$ равны по первому признаку ($A_1A_2 = A_3A_4$, $A_2A_3 = A_4A_5$ и $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_3A_4A_5$). Следовательно, $A_1A_3 = A_3A_5$. Аналогично для других диагоналей.

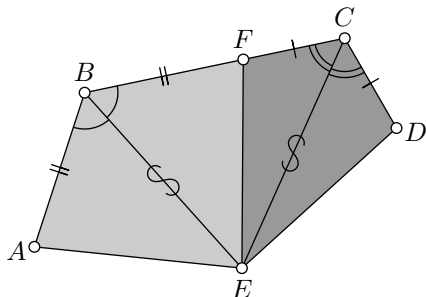


(б) Эту задачу можно решить с помощью только равных треугольников. Но можно решить и воспользовавшись задачей, которая будет на семинаре, про признак равенства четырёхугольников. Четырёхугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_4A_5A_6A_7$ равны по признаку равенства четырёхугольников ($A_1A_2 = A_4A_5$, $A_2A_3 = A_5A_6$, $A_3A_4 = A_6A_7$, $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_4A_5A_6$ и $\angle A_2A_3A_4 = \angle A_5A_6A_7$). Следовательно, $A_1A_4 = A_4A_7$. Аналогично для других диагоналей.



Задача 13. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно и $BC = AB + CD$. Докажите, что площадь треугольника BCE равна сумме площадей треугольников ABE и CDE .

Решение: Поскольку $BC = AB + CD$, то отметим на стороне BC такую точку F , что $BF = AB$ и $CF = CD$. Тогда треугольники ABE и FBE равны по первому признаку ($AB = BF$, BE — общая и $\angle ABE = \angle FBE$, так как BE — биссектриса угла B). Аналогично треугольники CDE и CFE равны по первому признаку ($CD = CF$, CE — общая и $\angle DCE = \angle FCE$, так как CE — биссектриса угла C). Площадь треугольника BCE равна сумме площадей треугольников FBE и CFE , которые соответственно равны треугольникам ABE и CDE .



Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

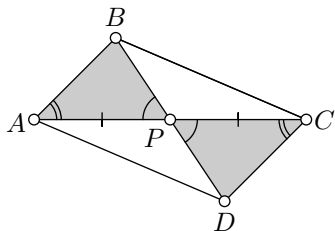


Задача 14.

Отрезки AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что P является серединой отрезка AC и $\angle BAP = \angle DCP$. Докажите, что $AB = CD$.

Решение:

Треугольники ABP и CDP равны по второму признаку ($AP = PC$, $\angle BAP = \angle DCP$ и $\angle APB = \angle CPD$.) Следовательно, $AB = CD$.

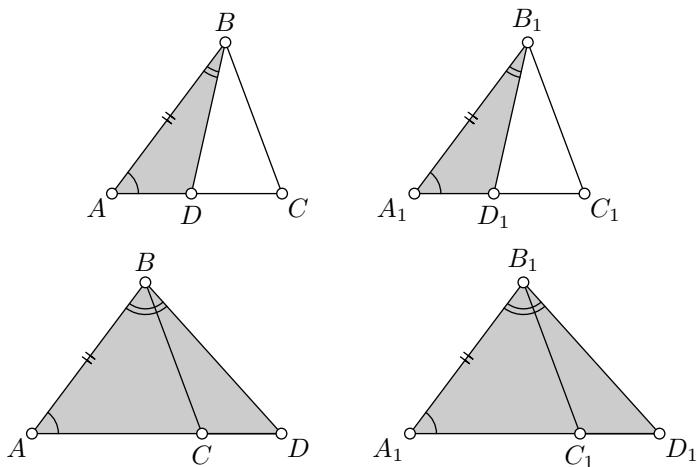


Задача 15. В равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ на лучах AC и A_1C_1 отмечены такие точки D и D_1 соответственно, что $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$. Докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$; BCD и $B_1C_1D_1$.

Решение:

Поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $AB = A_1B_1$ и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$. По условию $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$. Тогда треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по второму признаку.

Аналогично доказывается равенство треугольников BCD и $B_1C_1D_1$. Поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $BC = B_1C_1$ и $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ (на верхнем рисунке эти углы совпадают с равными углами $\angle BCA$ и $\angle B_1C_1A_1$, а на нижнем — являются смежными к ним). Из условия имеем $\angle CBD = |\angle ABC - \angle ABD| = |\angle A_1B_1C_1 - \angle A_1B_1D_1| = \angle C_1B_1D_1$ (на верхнем рисунке — $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = \angle A_1B_1C_1 - \angle A_1B_1D_1 = \angle C_1B_1D_1$, а на нижнем — $\angle CBD = \angle ABD - \angle ABC = \angle A_1B_1D_1 - \angle A_1B_1C_1 = \angle C_1B_1D_1$). Тогда треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по второму признаку.

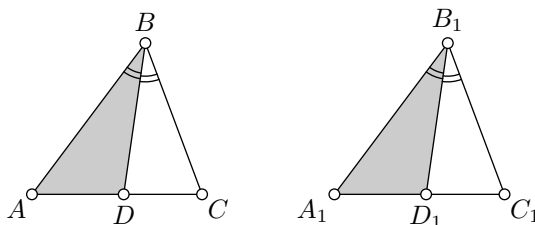


Задача 16. Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведённые из вершин соответственных углов, равны.

Решение:

Это частный случай задачи 15.

Рассмотрим равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и биссектрисы BD и B_1D_1 в них. Поскольку треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Поэтому $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1D_1$. Значит, по задаче 15 треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны, откуда $BD = B_1D_1$.

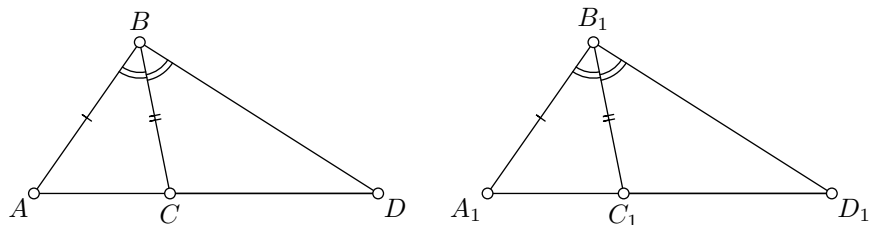


Задача 17. Докажите равенство треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе, проведённой из этого угла.

Решение:

Это частный случай задачи 15.

Рассмотрим треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, в которых равны стороны AB и A_1B_1 , углы $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и биссектрисы BC и B_1C_1 . Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ABD = \frac{1}{2}\angle A_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку, и по задаче 15 треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, что и требовалось доказать.

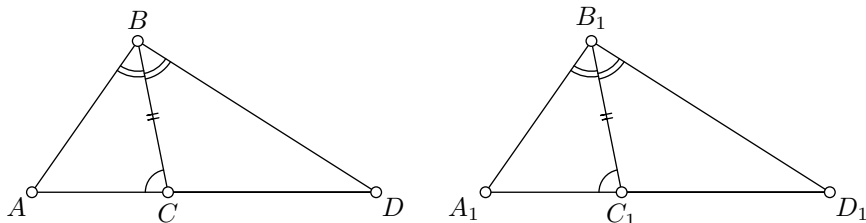


Задача 18. Докажите равенство треугольников по биссектрисе, углу из вершины которого проведена эта биссектриса, и углу, образованному биссектрисой со стороной, к которой она проведена.

Решение:

Это частный случай задачи 15.

Рассмотрим треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, в которых равны биссектрисы BC и B_1C_1 , углы $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$ и углы $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Тогда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ABD = \frac{1}{2}\angle A_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку, и по задаче 15 треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, что и требовалось доказать.



Задача 19. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно и $\angle AEB + \angle CED = \angle BEC$. Докажите, что площадь треугольника BCE равна сумме площадей треугольников ABE и CDE .

Решение: Поскольку $\angle AEB + \angle CED = \angle BEC$, то отметим на стороне BC такую точку F , что $\angle BEF = \angle AEB$ и $\angle CEF = \angle CED$. Тогда треугольники ABE и FBE равны по второму признаку ($\angle AEB = \angle BEF$, BE — общая и $\angle ABE = \angle FBE$, так как BE — биссектриса угла B). Аналогично треугольники CDE и CFE равны по второму признаку ($\angle CED = \angle CEF$, CE — общая и $\angle DCE = \angle FCE$, так как CE — биссектриса угла C). Площадь треугольника BCE равна сумме площадей треугольников FBE и CFE , которые соответственно равны треугольникам ABE и CDE .

