

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

	a	b
c	ac	bc
d	ad	bd

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$



$$(a + b)(c + d)$$

1. Про два действительных числа известно, что их сумма на 1 больше, чем их произведение. Какими могут быть эти числа?

BTW: Можете погуглить Simons favourite factoring trick

$$a + b = ab + 1$$

$$\underline{ab - a - b + 1 = 0}$$

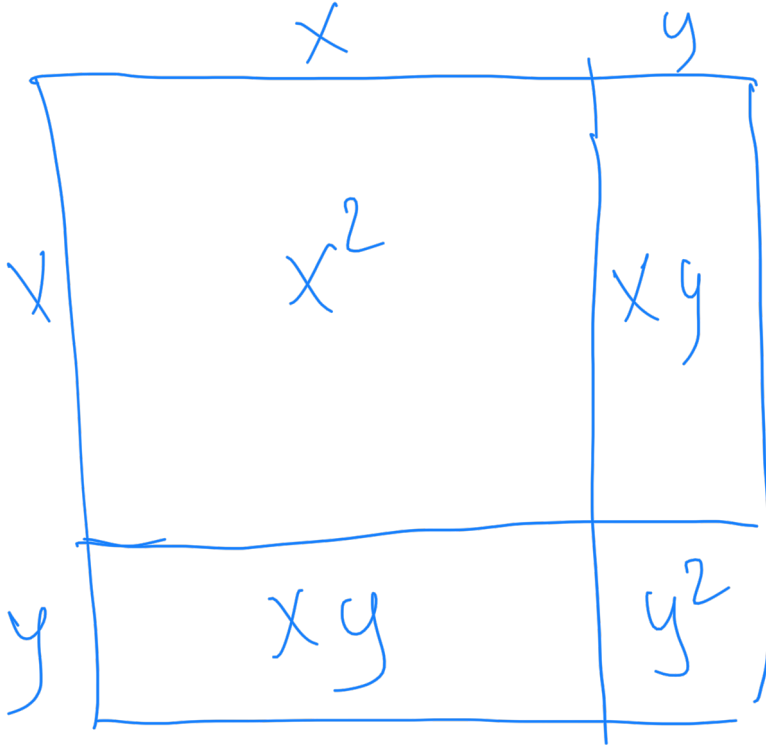
$$a(b - 1) - 1(b - 1) = 0$$

$$(b - 1)(a - 1) = 0$$

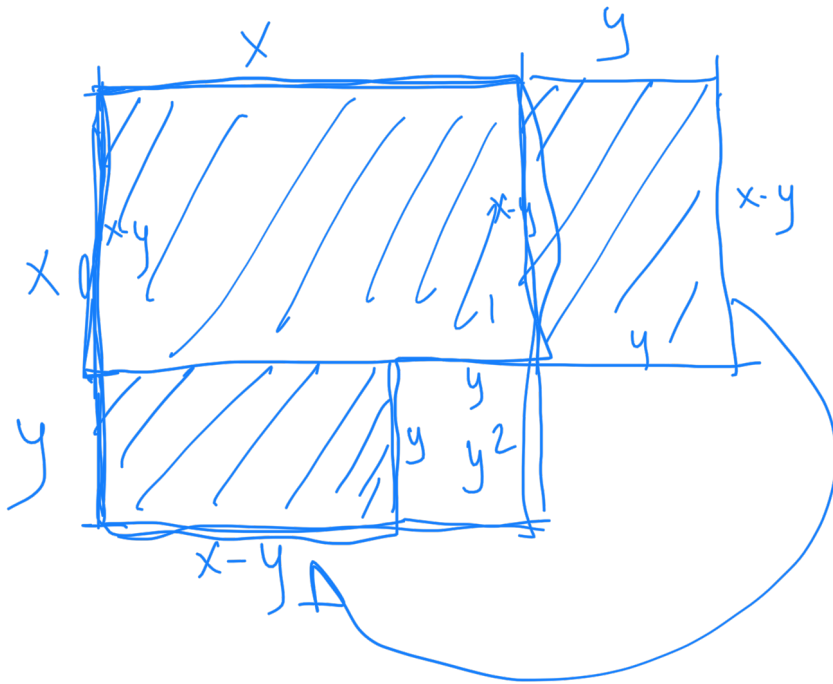
$$b - 1 = 0 \quad a - 1 = 0$$

$$b = 1 \quad a = 1$$

$$2. (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$



$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$



$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

A $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(a+1)^2 =$$

$$a^2 + 2a + 1$$

$$(a-2)^2 =$$

$$a^2 - 4a + 4$$

$$a^2 - 9 =$$

$$a=a$$

$$b=3$$

$$(a+3)(a-3) = (a-3)(a+3)$$

$$(a-bc)^2$$

$$a^2 - 2abc + b^2c^2$$

$$(a-b)^2$$

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{l}
 \text{A } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 \rightarrow \text{B } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
 \text{C } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2
 \end{array}$$

3. Докажите, что при любых значениях a, b, c выражение принимает неотрицательные значения: $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc$

$$a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 =$$

$$= \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$A \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$B \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^4 - a^2 - 2a$.

$$a^4 = (a^2)^2$$

$$(a^2)^2 - 2a^2 + a^2 - 2a =$$

$$= (a^2)^2 - 2a^2 \cdot 1 + 1 - 1 + a^2 - 2a =$$

$$= (a^2 - 1)^2 - 1 + a^2 - 2a =$$

$$= (a^2 - 1)^2 + a^2 - 2a + 1 - 1 - 1 =$$

$$= (a^2 - 1) + (a - 1)^2 - 2$$

$$a = 1$$

Ответ: -2

A $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

C $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

5. Дано: $a + b = 5$, $ab = 6$. Найдите $a^2 + b^2$

$$(a+b)^2 = 25$$

$$a^2 + \underbrace{2ab} + b^2 = 25$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 25 - 2ab \\ &= 25 - 2 \cdot 6 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + (a-b)^2 &= a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 = \\ &= 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$D \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$E \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$F \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$G \quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = -(b^3 - a^3)$$

6. Для ненулевых действительных чисел a и b выполнено равенство:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Докажите, что $a^2 = b^2$.

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$(a-b)(a+b) = 0$$

$$\frac{a^3}{a^2b^2} + \frac{b^3}{a^2b^2} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2b^2} - \frac{(a+b)}{ab} = 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab}{a^2b^2} = 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab)}{a^2b^2} = 0$$

$$(a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$a+b=0$$

$$a = -b$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a-b=0$$

$$a=b$$

$$(a+b)(a-b)^2 = 0$$

$$(a+b)(a-b)(a-b) = 0$$

$$D \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$E \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$F \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$G \quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

7. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$a + b + c = 0$$

$$a = -(b+c)$$

$$a^3 = (-(b+c))^3$$

$$a^3 = -(b+c)^3$$

$$a^3 = -(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)$$

$$a^3 = -b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = \cancel{-b^3} - 3b^2c - 3bc^2 - \cancel{c^3} + \cancel{b^3} + \cancel{c^3} =$$

$$= -3b^2c - 3bc^2 = -3bc(b+c) = 3bca = 3abc$$

$$H \quad (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \\ &= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) \\ &\quad (a^3 + a^2b + ba^2 + b^3) \end{aligned}$$

$$I \quad (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$$

$$\begin{aligned} a^4 - \cancel{a^3b} + \cancel{a^2b^2} - \cancel{ab^3} \\ + \cancel{a^3b} - \cancel{a^2b^2} + \cancel{ab^3} - b^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) &= \\ = (a+b)(a^3 + ab^2 - ba^2 - b^3) &= \\ = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \end{aligned}$$

8. a , b и c — целые числа. Докажите, что если $a = b + c$, то $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа. Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.

$$a^2 = (b+c)^2$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$(a^2 - 2bc)^2 = (b^2 + c^2)^2$$

$$(a^2 - 2bc)^2 = \underbrace{b^4} + 2b^2c^2 + \underbrace{c^4} \quad b^4 + c^4 = (a^2 - 2bc)^2 - 2b^2c^2$$

$$a^4 + \underbrace{b^4 + c^4} = a^4 + (a^2 - 2bc)^2 - 2b^2c^2 =$$

$$= a^4 + a^4 - 4a^2bc + 4b^2c^2 - 2b^2c^2 =$$

$$= 2a^4 - 4a^2bc + 2b^2c^2 =$$

$$= 2(a^4 - \underbrace{2a^2bc}_{\substack{\uparrow \quad \uparrow}} + b^2c^2) = 2(a^2 - bc)^2$$

$$J \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \underline{2ab} + \underline{2ac} + \underline{2bc}$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + \underline{2ac} + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$(a+b-c)^2 =$$

$$(\underline{a+b+c})d(\underline{a+b+c})d)$$

$$\rightarrow (\underline{a+b-c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(\underline{a-b-c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$$

$$\parallel$$

$$(-(a+b+c))^2 = (-a+b+c)^2 = (b+c-a)^2$$

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$\text{K } (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

Handwritten annotations: A blue bracket is drawn over the first two terms of the polynomial, with a^{n-1} written above it. Below the first term, $-a^{n-1}b$ is written and crossed out with a blue line.

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Handwritten annotations: A blue bracket is drawn over the polynomial, with $+a^{n-1}b$ written above it. Below the first term, $-a^{n-1}b$ is written and crossed out with a blue line.

$$(a^n - b^n)$$

$$(a+b+\dots)^2$$

$$\text{L } (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1}) = \underbrace{a^n - b^n}_{\dots + b^{n-1}} = a^n + b^n$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$M (a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ скобок}} =$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \quad \text{где } 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{C_3^1 = C_3^2}}$$

J $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \underline{2ab + 2ac + 2bc}$ $\leftarrow$

$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

K $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$, где $n \in \mathbb{N}$

L $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots) =$

M $(a+b)^n =$

9. a, b, c — такие три числа, что $\overbrace{a+b+c} = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение $\underbrace{ab+ac+bc} \leq 0$.

$0 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \underbrace{2ab + 2ac + 2bc} \geq 0$ $\nwarrow$

$\underbrace{2ab + 2ac + 2bc} = -(a^2 + b^2 + c^2)$

$\underbrace{2(ab+ac+bc)}_{\nwarrow 0} = -(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}) \leq 0$

10. Известно, что число n является суммой квадратов трёх натуральных чисел. Показать, что число n^2 тоже является суммой квадратов трёх натуральных чисел.

$$n = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\rightarrow (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$n^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 =$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$= (a^2 + b^2 - c^2) + 4a^2c^2 + 4b^2c^2$$

$$(a^2 + b^2 - c^2) + (2ac)^2 + (2bc)^2$$

11. Вычислите $123^2 - 122 * 124$

⊖

$$a^2 - b^2 - (a-b)(a+b)$$

$$123 = a$$

$$122 = a - 1$$

$$124 = a + 1$$

$$\ominus a^2 - (a-1)(a+1) = a^2 - (a^2 - 1) =$$

$$= \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 1 = \underline{1}$$

12. Произведение четырёх последовательных положительных нечётных чисел оканчивается на 9. Найдите две предпоследние цифры этого произведения.

1 3 ~~5~~ 7 9

7 9 10n 1 3

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\frac{(10n-3)(10n-1)(10n+1)(10n+3)}{(100n^2-1)(100n^2-9)} =$$

$$= 10000n^4 - 9 \cdot 100n^2 - 100n^2 + 9 =$$

$$= 10.000n^4 - 10 \cdot 100n^2 + 9 =$$

$$= \underbrace{10.000n^4 - 1000n^2}_{009} + 9$$

009

13. Представьте числовое выражение $2 \cdot 2025^2 + 2 \cdot 2026^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

$$2(2025^2 + 2026^2)$$

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 &= \\ &= (a+b)^2 + (a-b)^2 \end{aligned}$$

$$2025 = a$$

$$2026 = a+1$$

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2(a+1)^2 &= (a+a+1)^2 + (a-(a+1))^2 = \\ &= (2a+1)^2 + (a-a-1)^2 = \\ &= (2a+1)^2 + (-1)^2 \\ &= 4051^2 + 1^2 \end{aligned}$$

14. Разложить на множители $x^4 + 4$;

$$x^4 + 4 =$$

$$= x^4 + \underbrace{2 \cdot x^2 \cdot 2}_{(x^2)^2} + 4 - 4x^2 =$$

$$= \underbrace{(x^2 + 2)^2}_{(2x)^2} - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

15. Про три действительных числа x , y и z известно, что $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$. Могут ли эти числа быть попарно различными?

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$+ 2ab$$

$$+ 2bc$$

$$+ 2ac$$

$$\cancel{x^2} + y^2 + \cancel{z^2} - 2yz - 2xy + 2xz = \cancel{x^2} - y^2 + \cancel{z^2}$$

$$2y^2 - 2yz - 2xy + 2xz = 0 \quad | :2$$

$$y^2 - yz - xy + xz = 0$$

$$y(y - z) - x(y - z) = 0$$

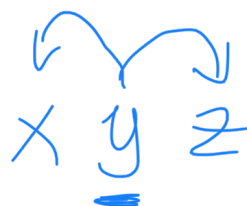
$$(y - z)(y - x) = 0$$

$$y - z = 0$$

$$y = z$$

$$y - x = 0$$

$$y = x$$



Simons favourite factoring trick

$$kxy + ax + by = c$$

$$x(ky + a) + by = c$$

$$x(ky + a) + \frac{b}{k}(ky) = c$$

$$\frac{b}{k} \cdot ky = by$$

$$x(ky + a) + \frac{b}{k}(ky + a \text{ } \boxed{-a}) = c$$

$$x(ky + a) + \frac{b}{k}(ky + a) - \frac{ab}{k} = c \quad \checkmark$$

$$(ky + a)\left(x + \frac{b}{k}\right) = c + \frac{ab}{k}$$

$$mn + 3m - 8n = 59$$

$$(ky + a) \left(x + \frac{b}{k} \right) = c + \frac{ab}{k}$$

$$(1y + 3) \left(x + \frac{-8}{1} \right) = 59 + \frac{3 \cdot (-8)}{1}$$

$$(y + 3)(x - 8) = 59 - 24$$

$$(y + 3)(x - 8) = 35$$

Тождество Брахмагупты — Фибоначчи

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad (1)$$

$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \quad (2)$$

$$a^2c^2 - \cancel{2acbd} + b^2d^2 + a^2d^2 + \cancel{2adbc} + b^2c^2$$

$$= \underbrace{a^2c^2 + b^2d^2} + \underbrace{a^2d^2 + b^2c^2}$$

$$a^2(\underbrace{c^2 + d^2}) + b^2(\underbrace{d^2 + c^2}) =$$

$$= (c^2 + d^2)(a^2 + b^2)$$