

## Геометрические неравенства

2 марта 2026

**Теорема о большей стороне и большем угле треугольника.** В любом треугольнике

- против большей стороны треугольника лежит больший угол;
- против большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона.

**Теорема о перпендикуляре и наклонной.** Перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, короче любой наклонной, проведенной из этой точки к прямой.

**Теорема о проекциях и наклонных.** Если из точки проведены две наклонные к прямой, то у большей наклонной будет бо́льшая проекция.

**Неравенство треугольника.** Для любых трёх точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскости выполняются неравенства

$$AB + BC \geq AC \geq |AB - BC|.$$

Если точки не лежат на одной прямой, то неравенства строгие.

**Неравенство о диагоналях четырёхугольника.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  верно:

(а)  $AB + CD < AC + BD$ .

(б) сумма  $AC + BD$  меньше его периметра, но больше полупериметра.

**Неравенство медианы.** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ . Тогда

$$\frac{AB + BC}{2} > BM > \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

**Неравенство резинки.** Внутри треугольника  $ABC$  отмечена произвольная точка  $P$ . Тогда  $AP + PC < AB + BC$ .

## Геометрические неравенства

2 марта 2026

### Базовый уровень

1. В выпуклом четырёхугольнике найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин минимальна.
2. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Известно, что  $AB > AC$ . Докажите, что  $BD > DC$ .
3. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ . Докажите, что если  $BM < \frac{1}{2}AC$ , то  $\angle B > 90^\circ$ , а если  $BM > \frac{1}{2}AC$ , то  $\angle B < 90^\circ$ .
4. Прямая пересекает боковые стороны  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а продолжение основания  $AC$  за точку  $C$  в точке  $K$ . Докажите, что  $AM < MK$ .
5. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Известно, что  $AB + BD \leq AC + CD$ . Докажите, что  $AB < AC$ .

### Продвинутый уровень

6. Внутри треугольника  $ABC$  отмечена произвольная точка  $P$ . Докажите, что сумма  $AP + BP + CP$  меньше периметра треугольника, но больше его полупериметра.
7. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . Известно, что  $AB > BC$ . Сравните  $AL$  и  $CL$ .
8. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольнике  $ABC$  отметили такие точки  $D$  и  $E$ , что  $\angle BDE = \frac{1}{2}\angle A$ . Докажите, что  $AC + AD > EC$ .
9. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). На стороне  $AC$  выбрана точка  $M$ , а на продолжении этой же стороны за точку  $C$  выбрана точка  $N$  такая, что  $AM = CN$ . Докажите, что  $BM + BN > BA + BC$ .
10. Решите задачу 1 для невыпуклого четырёхугольника.
11. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $ABC$  и  $BCD$  равны  $120^\circ$ . Докажите, что  $AC + BD > AB + BC + CD$ .