

Геометрическое место точек (ГМТ), окружность

Геометрическое место точек

Определение. *Геометрическим местом точек* (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, которые удовлетворяют какому-либо определенному условию.

Серединный перпендикуляр как ГМТ

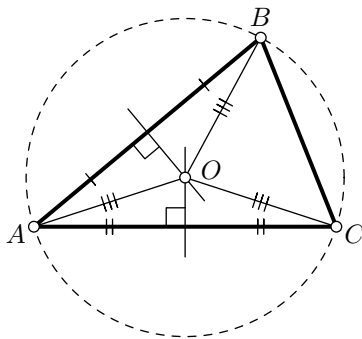
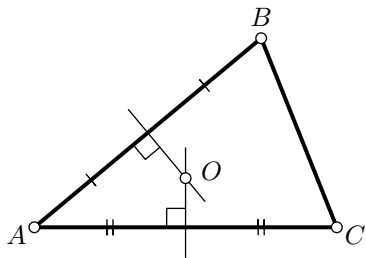
Теорема. Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Нужно проверить два условия:

- точки, равноудалённые от концов отрезка, лежат на серединном перпендикуляре;
- точки, лежащие на серединном перпендикуляре, равноудалённые от концов отрезка.

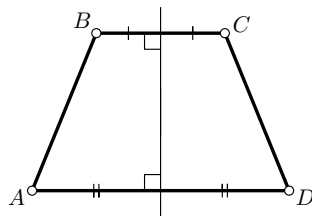
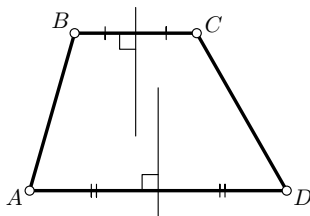
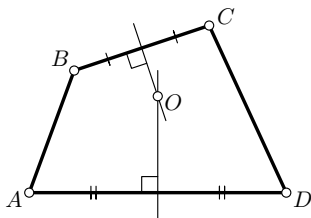
Задача 1

Дан треугольник ABC . Где находится такая точка O , что $AO = BO = CO$? Сколько может быть таких точек?



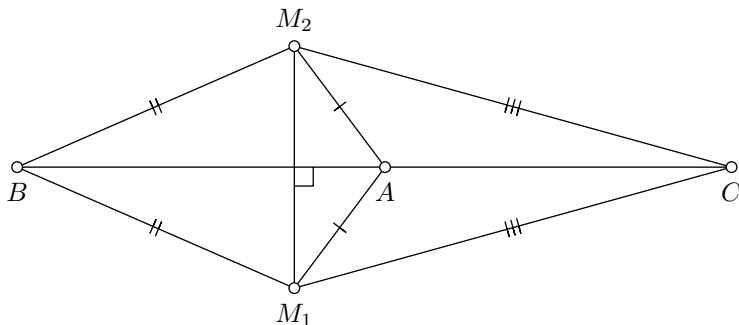
Задача 2

Дан четырехугольник $ABCD$. Где находится такая точка O , что $AO = DO$ и $BO = CO$? Сколько может быть таких точек?



Задача 3

Дан треугольник ABC . Некоторая точка M такова, что $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 3$. Докажите, что такая точка единственная.

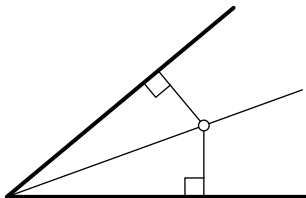


Биссектриса как ГМТ

Теорема. Геометрическим местом точек внутри угла, равноудалённых от его сторон, является биссектриса этого угла.

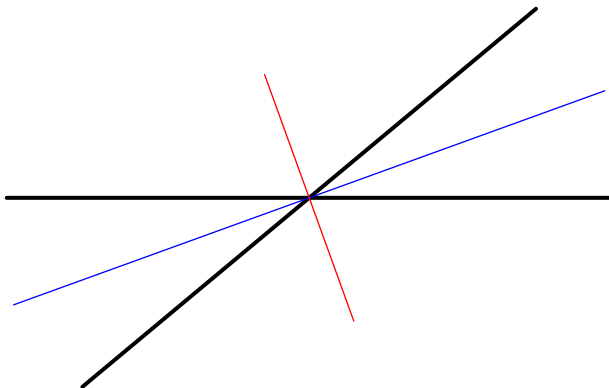
Нужно проверить два условия:

- точки внутри угла, равноудалённые от его сторон, лежат на биссектриса этого угла;
- точки внутри угла, лежащие на биссектриса этого угла, равноудалённые от его сторон.



Задача 4

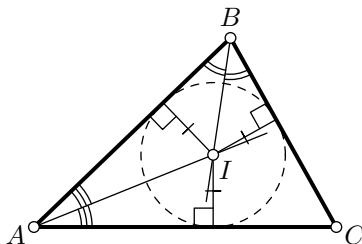
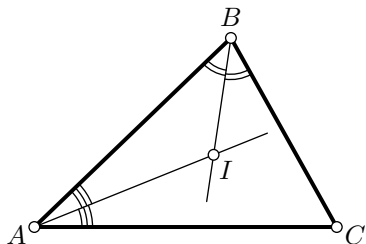
Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых.



Задача 5

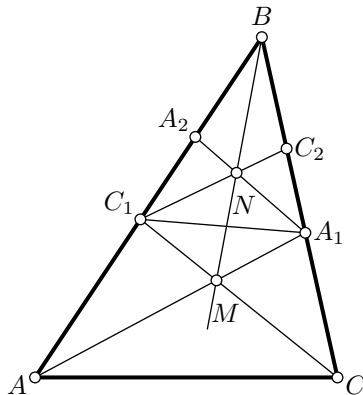
(а) Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке I . Докажите, что точка I лежит на биссектрисе угла B .

(б) Найдите ГМТ внутри данного треугольника, равноудалённых от всех его сторон.



Задача 6

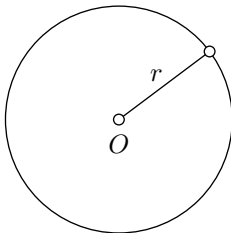
Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M , биссектрисы A_1A_2 и C_1C_2 треугольника A_1BC_1 пересекаются в точке N . Докажите, что точки B , M и N лежат на одной прямой.



Окружность и круг как ГМТ

Определения. *Окружность* — это множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, а указанное расстояние — *радиусом* окружности.

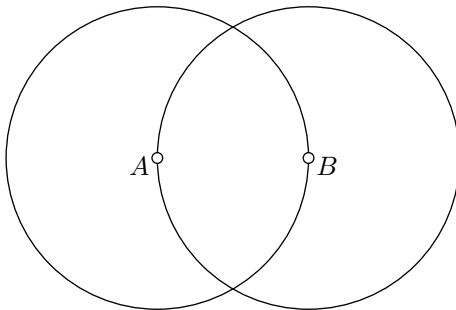
Круг — это множество всех точек плоскости, удалённых от от данной точки не более чем на длину данного отрезка. Данная точка называется *центром* круга, а указанное расстояние — *радиусом* круга.



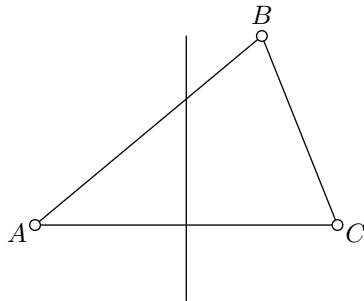
Задача 7

Дан отрезок AB . Закрасьте на плоскости множество всех таких точек M , что

$$AM < AB < BM.$$

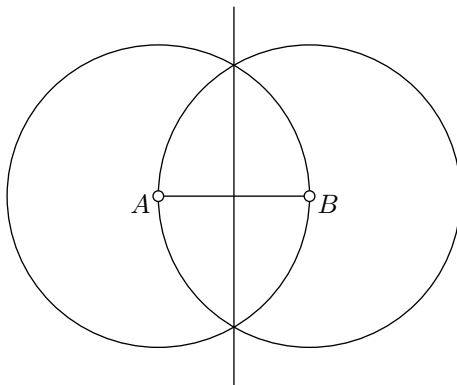


Теорема. Дан отрезок AB . Геометрическим местом точек M таких, что $AM < BM$, является полуплоскость, расположенная по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB , что и точка A .



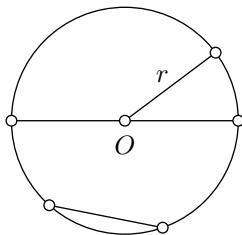
Задача 8

Дан отрезок AB . Закрасьте на плоскости множество всех таких точек M , что AM — наименьшая сторона треугольника ABM .



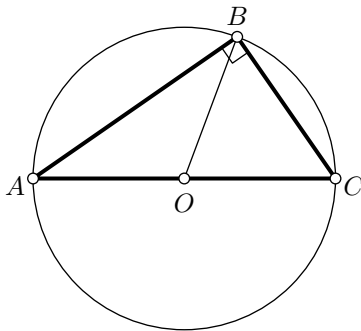
Окружность

Определение. *Окружность* — это множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, а указанное расстояние — *радиусом* окружности. *Хордой* называется отрезок, соединяющий любые две точки окружности. *Диаметром* окружности называется хорда, проходящая через её центр.



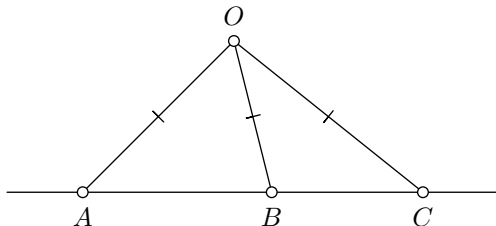
Теорема. (а) Окружность с центром в середине гипотенузы прямоугольного треугольника проходит через вершину прямого угла.

(б) Диаметр окружности из любой её точки виден под прямым углом.



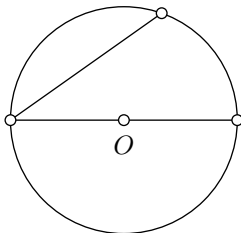
Задача 9

Докажите, что прямая и окружность могут пересекаться не более, чем в двух точках.



Задача 10

Докажите, что любая хорда окружности не превосходит её диаметра.



Задача 11

Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры.

Задача 12

Докажите, что две окружности могут пересекаться не более, чем в двух точках.

Касательная к окружности

Определение. *Касательная к окружности* — это прямая, которая имеет одну общую точку с окружностью.

Теорема. (а) (*Свойство касательной.*) Касательная к окружность перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

(б) (*Признак касательной.*) Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Задача 13

Окружность с центром в точке O делит отрезок AO пополам. Найдите угол между касательными, проведёнными из точки A .

Задача 14

Прямая, параллельная хорде AB , касается окружности в точке C . Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

Задача 15

Через точку M к окружности с центром O провели касательные MA и MB , A и B — точки касания, $\angle AOB = 20^\circ$. Найдите угол AMB .