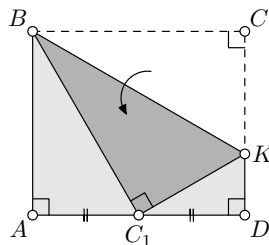


Прямоугольные треугольники

15 декабря 2025

1. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке P , углы ABD и ACD прямые, $AB = CD$. Докажите, что $AP = PD$.
2. **(Письменно)** В треугольнике ABC угол A на 120° больше угла C . Докажите, что биссектриса BL вдвое длиннее, чем высота BH .
3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , BL — его биссектриса, точка K на стороне AB такова, что $CK = AC$. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что отрезок CK пересекает отрезок BL в его середине.
4. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение $DK : AB$, если C_1 — середина AD .
5. **(Письменно)** Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , CH — его высота. Найдите AB , если известно, что $CH = 1$ и $\angle B = 15^\circ$.
6. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC . Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.
7. В выпуклом четырёхугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.
8. В треугольнике ABC угол A равен 45° , а угол C равен 30° . Найдите угол между медианой AM и стороной BC .



К задаче 4

Прямоугольные треугольники

8 декабря 2025

Задачи, которые можно обсудить (но не сдавать) на семинаре:

1. (*Обсудили на лекции.*) Докажите равенство остроугольных треугольников по стороне и высотам, опущенным на две другие стороны. Верно ли это утверждение для тупоугольных треугольников? А для прямоугольных? Что изменится, если убрать условие про вид треугольника из условия?
2. (а) Две высоты треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
(б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
3. (а) (*Обсудили на лекции.*) Докажите, что точка на биссектрисе угла равноудалена от его сторон.
(б) (*Обсудили на лекции.*) Докажите, что если точка внутри угла равноудалена от его сторон, то она находится на его биссектрисе.
4. Медиана разбивает треугольник на два меньших треугольника. Докажите, что высоты этих треугольников, проведённые к этой медиане, равны.
5. Прямая проходит через середины двух сторон треугольника. Докажите, что высоты, опущенные на нее из концов третьей стороны треугольника равны.
6. (а) (*Обсудили на лекции.*) Одна из сторон треугольника в два раза короче другой, а угол между ними равен 60° . Обязательно ли треугольник прямоугольный?
(б) (*Обсудили на лекции.*) Одна из сторон треугольника в два раза короче другой, а угол напротив неё равен 30° . Обязательно ли треугольник прямоугольный?
7. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а биссектриса AM , медиана BN и высота CL пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.
8. В треугольнике ABC биссектриса угла A , серединный перпендикуляр к стороне AB и высота, опущенная из вершины B , пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектриса угла A , серединный перпендикуляр к AC и высота, опущенная из C , также пересекаются в одной точке.
9. Дан прямоугольный треугольнике ABC с прямым углом C , CH — его высота, точка D на стороне BC такова, что $\angle DAC = \angle DBA$. Докажите, что высота CH пересекает отрезок AD в его середине.
10. (*Обсудили на лекции.*) Дан остроугольный треугольник ABC с углом B , равным 60° , AA' и CC' — его высоты, M — середина стороны AC . Докажите, что треугольник $A'MC'$ — равносторонний.
11. (*Обсудили на лекции.*) Дан треугольник ABC , AA' и CC' — его высоты, H — точка их пересечения, M и N — середины отрезков AC и BH соответственно. Докажите, что прямые MN и $A'C'$ перпендикулярны.