

Метод математической индукции

Рассмотрим утверждение типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т. д.

Шаг 0: Найдите в условии задачи такое замаскированное утверждение (и переменную n). Переделайте формулировку условия в виде цепочки утверждений.

Шаг 1: *База индукции.* Докажите утверждение(-я) из начала цепочки (обычно это $n = 1$, но не обязательно).

Шаг 2: *Предположение индукции.* Допустим, что утверждения цепочки с номерами $1, 2, \dots k$ верны.

Шаг 3: *Переход индукции.* Докажите, что если верно утверждение цепочки с номером k (*предположение индукции*), то верно утверждение цепочки с номером $k + 1$.

Принцип математической индукции. Если верна база индукции, и верен переход индукции, то верны все утверждения цепочки, ибо до каждого из них можно дойти от базы шагами перехода.

1. Докажете тождество: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1. База $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

2. Предпол. $n = 1, \dots, k$

$$1 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3. Переход. $1 + \dots + k + (k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \stackrel{?}{=} \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

2. Докажете тождество: $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

1. База $n=0$ $1 \cdot 2^0 = 1$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2}$$

$$n=1 \quad 1$$

$$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$1 = 1$$

2. Предпос. $n=1, 2, \dots, k$ тождество верно

3. Преход $n = k+1$

$$\underbrace{1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}}_{2^k - 1} + 2^{(k+1)-1} \stackrel{?}{=} 2^{k+1} - 1$$

$$\underline{2} \cdot \underbrace{2^k}_{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

3. (Неравенство Бернулли) $x \geq -1$, n – натуральное число. Докажите, что $(1+x)^n \geq 1+nx$.

1. База $n=1$ $(1+x)^1 \stackrel{?}{\geq} 1+1 \cdot x$
 $1+x \geq 1+x$

2. Предпол. $n=1, \dots, k$ $(1+x)^k \geq 1+kx$

3. Шаг индукции $n=k+1$

$$(1+x)^{k+1} \stackrel{?}{\geq} 1+(k+1)x$$

$$(1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$= 1 + \underline{x} + \underline{kx} + kx^2 = 1 + x(1+k) + \underline{kx^2} \geq$$

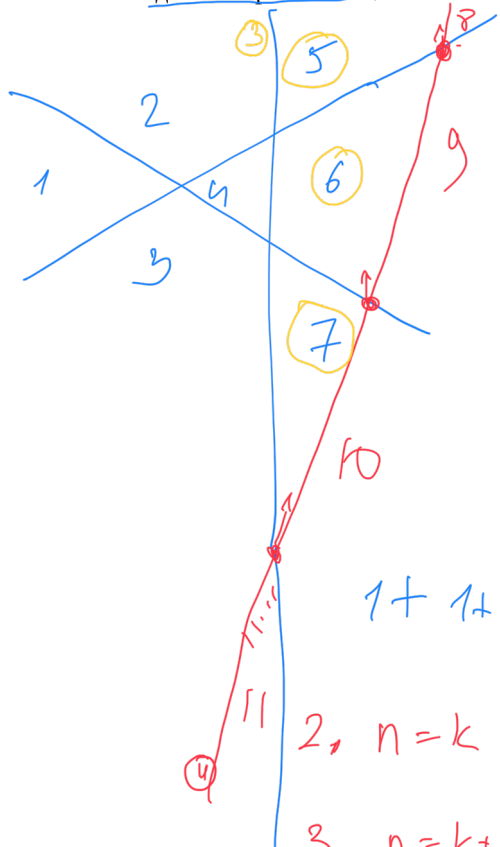
$$\geq 1+x(1+k)$$

$$x^5 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{} \cdot x = x^4 \cdot x$$

4. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти. Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n - 1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n - 1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти.



5. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?



1. База

n	k_n
1	$2 \leq 1$
2	$4 \leq 3$
3	$7 \leq 6$
4	$11 \leq 10$

$$k_{n+1} = k_n + (n+1)$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = k_n$$

2, $n = k$ $1 + 1 + \dots + k = k_k$

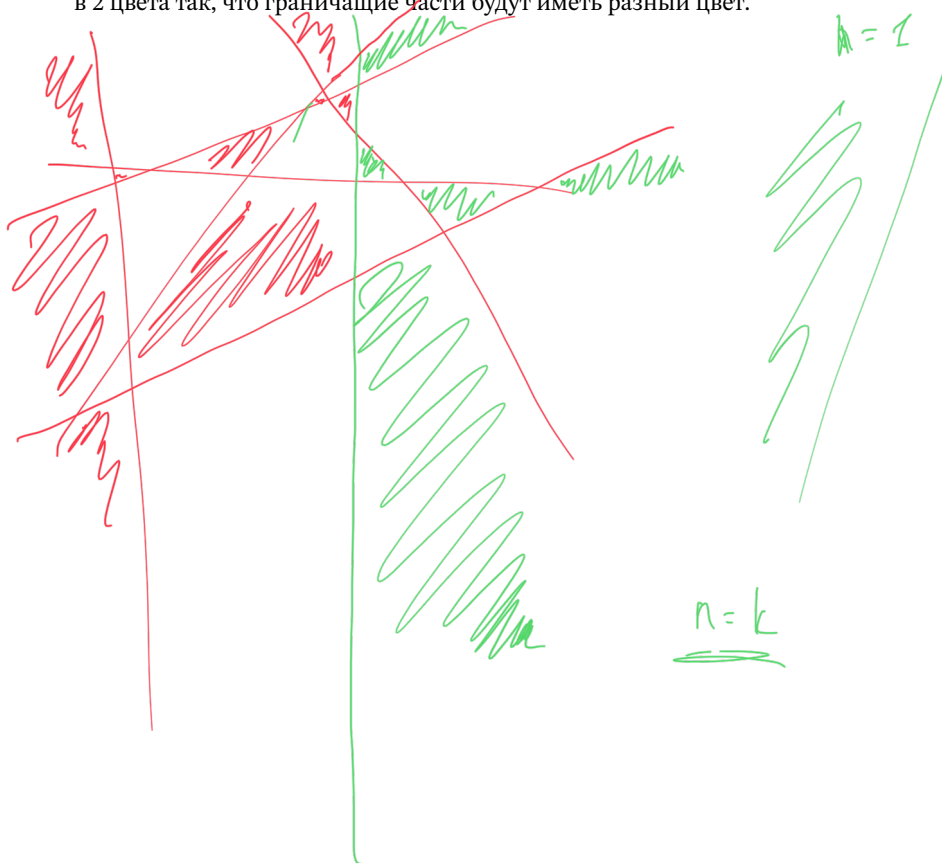
3, $n = k+1$ $1 + 1 + \dots + k + (k+1) = k_{k+1}$

$$k_{k+1} = 1 + \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Для n прямых:

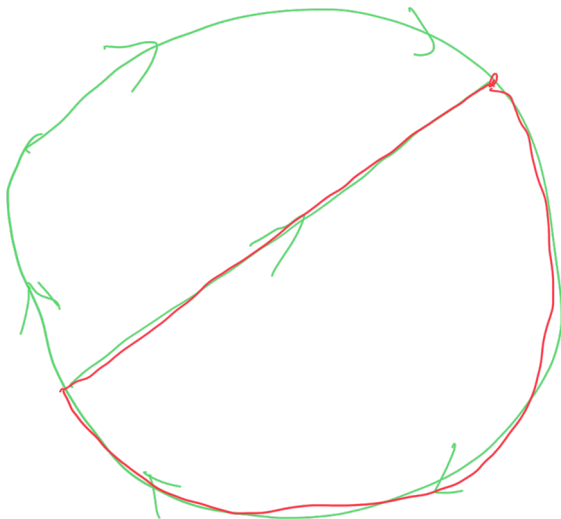
$$1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

6. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.



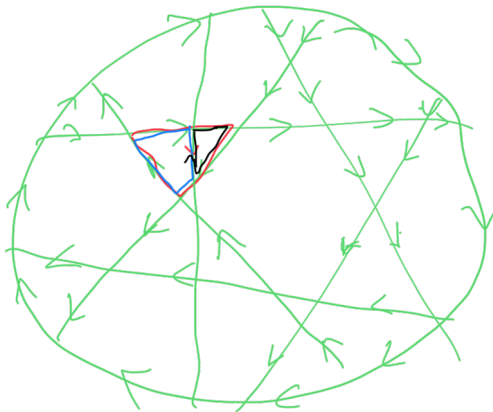
7. Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

База



Предпол. $n = k$

Шал $n = k + 1$



8. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру всегда можно разрезать на уголки, состоящие из трёх клеток

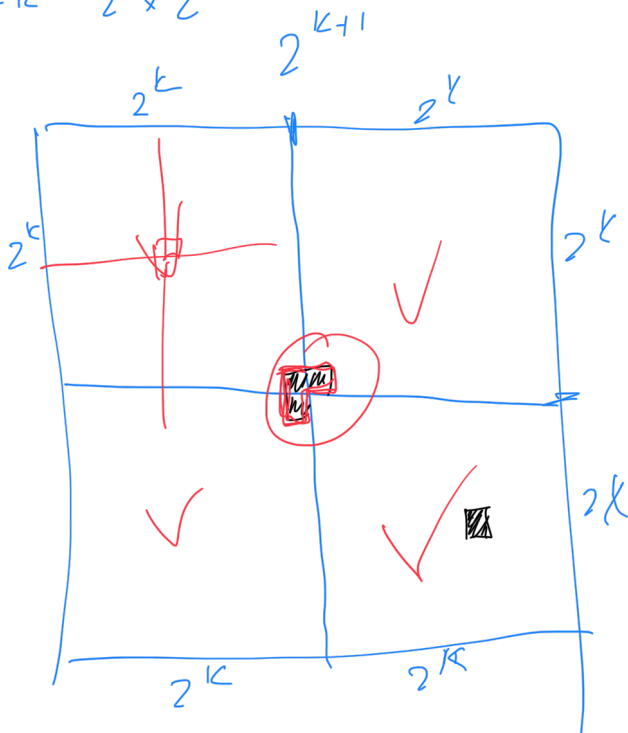
1. База $n=1$



$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2$$

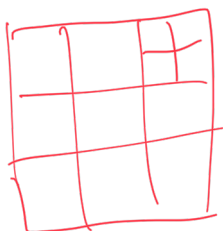
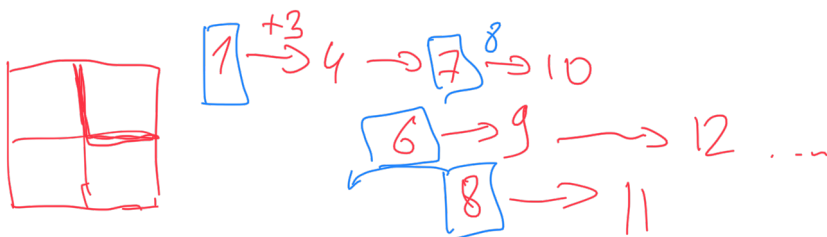
2. Пред. $n=k$ $2^k \times 2^k$

3. Шаг.

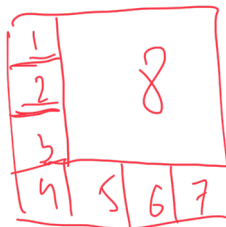


$$2^{k+1}$$

9. Докажите, что любой квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n , начиная с шести.



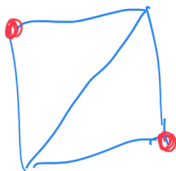
1. $n = 6, 7, 8$
 2. $n = 6, \dots, k$
 3. $n = k+1$
- $k-2$



10. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

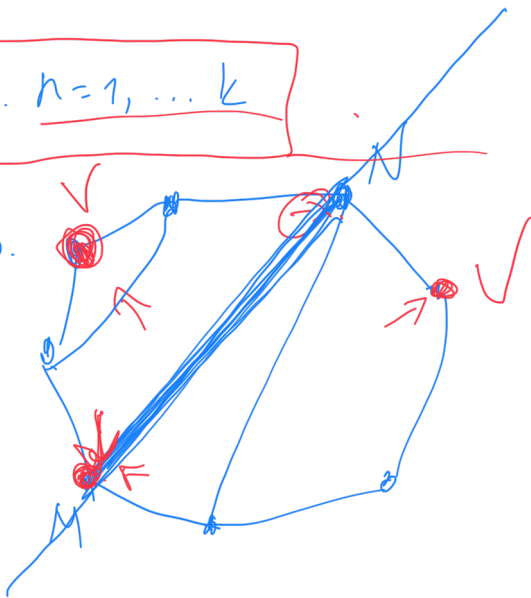
несмежные

1. База



2. $n=1, \dots, k$

3.



11. Докажите, что для всех натуральных n число $\underbrace{1 \dots 1}_{3^n}$ делится на 3^n .

1. База $n=1$ $111 : 3$

2. Предпол. $n=1, \dots, k$

$$\underbrace{1 \dots 1}_{3^n} : 3^n$$

3. Переход.

$$\underbrace{1 \dots 1}_{3^{k+1}} = 3^k \cdot 3 = \underbrace{1 \dots 1}_{3^k} \cdot \underbrace{111}_3$$

$$\begin{array}{r} \times 53 \\ 101 \\ \hline 53 \\ 530 \\ \hline 5353 \end{array}$$

$$\underbrace{1 \dots 1}_{3^k} \cdot \underbrace{10 \dots 0}_{3^k-1} \cdot \underbrace{10 \dots 0}_{3^k-1} \cdot \underbrace{1}_{1}$$

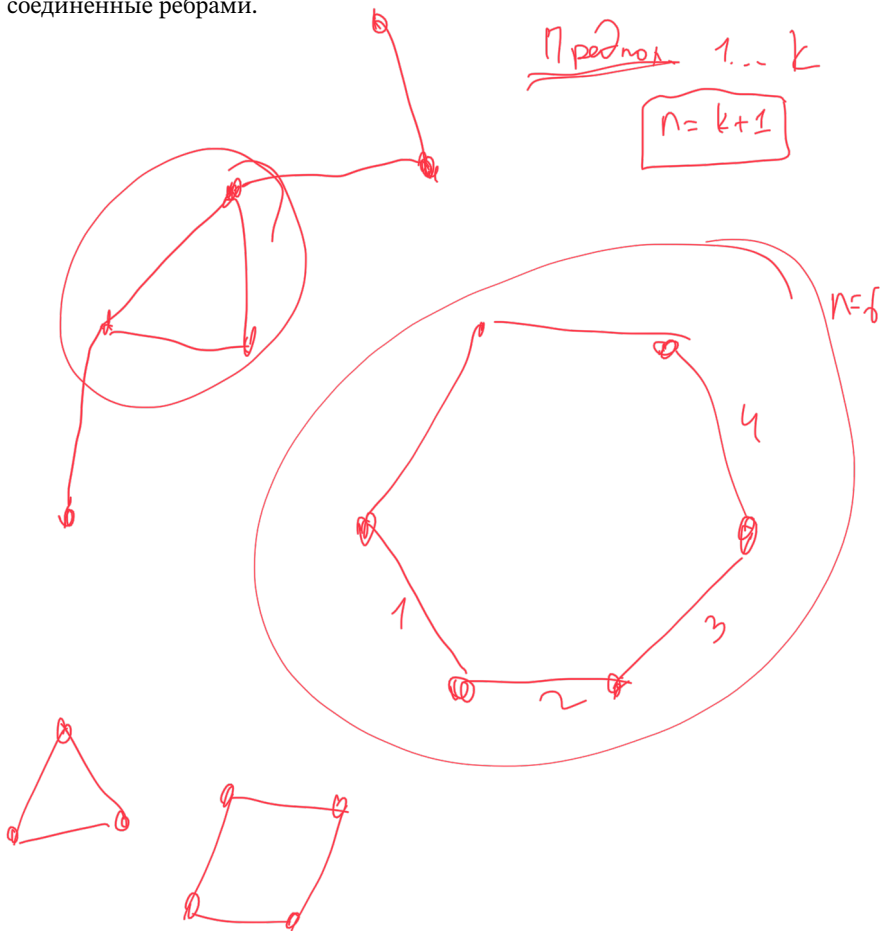
$$\underbrace{\underbrace{3^k}_{:3^k} \cdot \underbrace{3^{k-1}}_{:3} \cdot \underbrace{3^{k-1}}_{:3}}_{:3^{k+1}}$$

12.

13. Найдите ошибку в рассуждениях. Верно ли исходное утверждение?

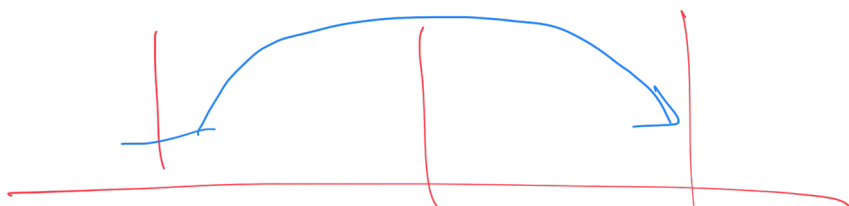
«**Утверждение**». В любом графе с n вершинами и n рёбрами ($n \geq 3$) обязательно есть три вершины, попарно соединённые рёбрами.

«**Доказательство**». При $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что в графе с $k \geq 3$ вершинами и k рёбрами обязательно есть три вершины, попарно соединённые рёбрами. Добавим ещё одну вершину и соединим ребром две несоединённые ранее вершины. Получим граф с $k + 1$ вершинами и $k + 1$ рёбрами и в нём есть три вершины попарно соединённые рёбрами. □

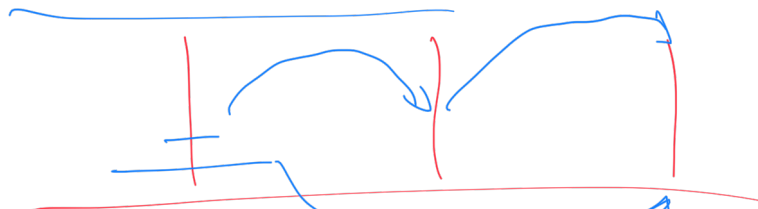


14. Головоломка «Ханойская башня» представляет собой n дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трёх кольшков. Требуется переместить всю башню на другой кольшек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. За какое минимальное количество ходов можно решить головоломку?

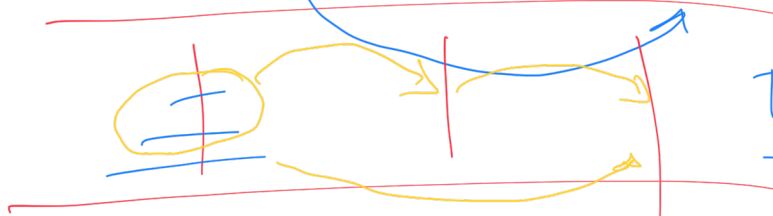
$$\begin{aligned}
 & 2(1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k) + 1 = \\
 & = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k+1} + 1 = \\
 & = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k+1}
 \end{aligned}$$



$$n = 1 \quad T_1 = 1$$



$$T_2 = 3$$



$$T_3 = T_2 + 1 + T_2$$

$$T_3 = 2T_2 + 1 =$$

$$= 6 + 1 = 7$$

$$T_n = 2 \cdot T_{n-1} + 1$$

$$2 \cdot (1 + 2^1 + \dots + 2^k) + 1$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots}_{7} = 1 + 2^1 + \dots + 2^{k+1}
 \end{aligned}$$

Основные наблюдения:

1. Если задачу можно "уменьшить" то можно попробовать индукцию
2. Попробовать на маленьких числах: и понимаем устройство, и обеспечиваем базу
3. Попробовать свести случай n к случаю $n - 1$ или меньшему