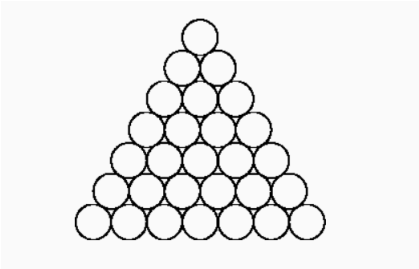
Двойной подсчёт

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 17 апреля.

Базовый уровень

1. В ряд стоят m мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого мальчика спросили, сколько справа от него стоит девочек, а каждую девочку — сколько слева от неё стоит мальчиков. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

2. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера. Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



3. 20 шахматистов сыграли каждый с каждым по одному разу. Корреспондент «Спортивной газеты» написал в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свёл вничью. Не ошибся ли корреспондент?

4. В классе каждый ученик дружит ровно с шестью другими, и у любых двух учеников есть ровно два общих друга. Сколько учеников в этом классе?

Продвинутый уровень

5. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

6. На конференцию приехало 20 профессоров, каждый из которых знаком ровно с шестью коллегами (знакомство взаимно). Найдите число таких различных групп из трёх учёных, что в них либо все профессора знакомы друг с другом, либо каждый не знаком ни с одним из двух оставшихся.

7. В клетки шахматной доски записаны числа от 1 до 64 (первая горизонталь нумеруется слева направо числами от 1 до 8, вторая от 9 до 16 и т. д.). Перед

некоторыми числами поставлены плюсы, перед остальными — минусы, так что в каждой горизонтали и в каждой вертикали по четыре плюса и по четыре минуса. Докажите, что сумма всех чисел равна 0.

8. **(а)** В турнире по теннису (в теннисе не бывает ничьих) среди 99 участников каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Докажите, что сумма квадратов побед участников турнира равна сумме квадратов поражений участников турнира.

(б) Докажите, что хотя бы в одной игре встретились игроки, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр этого турнира.

9. 45 школьников решали 100 задач, при этом каждую задачу решили 36 детей. Докажите, что есть три школьника, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

10. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.