Дискретная непрерывность

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 3 апреля.

Базовый уровень

1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причем первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

2. По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(а) Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(б) Докажите, что для каждого $2n = 2, 4, \ldots, 30$ можно выбрать $2n$ школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

3. В некоторой стране человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Докажите, что можно установить премьер-министру такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные. Считайте, что зарплата бывает любым вещественным числом.)

4. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

Продвинутый уровень

5. Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

6. В строке четырёхзначных чисел первое число 2013, последнее 2031. Соседние числа отличаются на 1 или на 100. Верно ли, что хотя бы одно число делится на 101?

7. Некто расставил в произвольном порядке 10-томное собрание сочинений. Назовём беспорядком пару томов, для которых том с большим номером стоит левее. Для данной расстановки томов посчитано число S всех беспорядков. Какие значения может принимать S?

8. В ряд лежат 300 апельсинов, веса соседних отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что их можно разложить в пакеты по 3 штуки и положить пакеты в ряд так, чтобы веса любых двух соседних пакетов отличались не более чем на 10 г.

9. Докажите, что в любом стозначном числе цифры можно переставить так, чтобы разность между суммой трёх первых и трёх последних цифр находилась в промежутке от 0 до 9.

10. Кай сидит в темнице у Снежной королевы и рассматривает 100 монет, среди которых 50 — фальшивых. Каждую минуту он может разделить их на две кучки. Цель — получить две кучки, в которых поровну или настоящих, или фальшивых. Сможет ли Кай уложиться **(а)** за 50 минут; **(б)** за 25 минут?