Игры и стратегии

Мы будем рассматривать игры, удовлетворяющие следующим условиям:

- они заканчиваются за конечное количество ходов, то есть не могут длиться бесконечно;
- в них участвуют два игрока;
- в них нет ничьих;
- в них нет никаких случайностей: подбрасываний кубиков, монетки и т. п.;
- каждый ход определяется правилами и стратегиями игроков;
- оба игрока играют правильно, т.е. каждый стремится к своей победе.

Базовые концепции в играх:

- игры-шутки
- выигрыш в один ход
- избегание проигрыша в один ход
- симметричная стратегия
- дополнение
- разбиение позиций на пары
- принуждение
- анализ выигрышных и проигрышных позиций:
  - *выигрышная* позиция — позиция, начиная с которой игрок выигрывает
  - *проигрышная* позиция — позиция, начиная с которой игрок проигрывает
  - расстановка позиций начинается с конца игры
  - из выигрышной позиции есть ход в проигрышную
  - из проигрышной позиции все ходы ведут в выигрышные
  - победная стратегия: «ставить противника на проигрышные позиции»
- передача хода — концепция, показывающая, что у одного из игроков не может быть выигрышной стратегия, как правило, идея заключается в том, что другой игрок может стать как первым, так и вторым в игре, начинающейся с определённой позиции.

Задачи для разбора

1. На столе лежат две стопки монет: в одной из них 52, в другой 67 монет. За один ход разрешается убрать со стола любое натуральное число монет, лежащих в одной стопке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

2. У ромашки **(а)** 12 лепестков; **(б)** 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

3. Дана таблица 9×9. Двое играют в игру, ходят по очереди. Каждым ходом разрешается в любую из пустых клеток записать цифру от 1 до 9. Проигрывает тот, после чьего хода в одной строке или столбце окажутся две одинаковые цифры, или тот, кто не может сделать. Кто выиграет при правильной игре?

4. В строчку выписано 100 единиц. Михаил и Егор по очереди ставят между какими-нибудь двумя соседними единицами знак плюс или минус. Когда между всеми соседними числами поставлены знаки, вычисляется результат. Если полученное число чётно, то выигрывает Михаил, в противном случае — Егор. Кто выиграет, если начинает Михаил?

5. Дана клетчатая полоса $1 \times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?

6. Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

7. В куче лежит 50 камней. Двое по очереди зибирают из неё от 1 до 4 камней. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто это будет — первый или второй?

8. Есть шахматная доска, на некоторой клетке которой стоит король. Двое по очереди делают королём ходы, причём нельзя делать ход в клетку, в которой король уже был. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

9. В левом нижнем углу шахматной доски стоит ладья. За один ход разрешается сдвинуть её на любое количество клеток вверх или любое количество клеток вправо. Двое по очереди двигают ладью до тех пор, пока какой-то игрок не сможет сделать ход. Этот игрок считается проигравшим. Кто выигрывает при правильной игре?

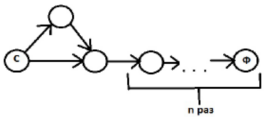
10. Есть прямоугольник 7×10, составленный из точек. Двое игроков по очереди

соединяют соседние узлы отрезками: первый игрок соединяет узлы по диагонали, а второй — по вертикали или по горизонтали. Ломаная, полученная к концу игры, должна быть несамопересекающейся. Они начинают из левой нижней точки. Выигрывает тот, кто проведёт отрезок в правую верхнюю точку. Сможет ли кто-то гарантированно добиться победы, и если сможет, то кто именно?

11. В куче лежит 50 камней. Двое по очереди зибирают из неё 1, 2 или 4 камня. Проигрывает тот, кто заберёт последний камень. Кто это будет — первый или второй?

12. Есть две кучки по 10 камней. За ход можно взять два камня из одной кучки и один — из другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

13. Петя и Вася двигают фишку по стрелочкам с поля C до поля Ф, делая ходы по очереди. Кто выигрывает при правильной игре, если за один ход разрешено передвигать фишку на: **(а)** 1, 2, 3 или 4 поля; **(б)** 1, a, b, c полей.



14. На доске написано число 2. За ход разрешается прибавить к числу на доске любой из его делителей, меньший самого числа. Выигрывает тот, кто первым получит число больше 1000000. Кто может выиграть при правильной игре?