Элементарные идеи в неравенствах

Алгебраические свойства неравенств:

- если $a > b, b > c$, то $a > c$;
- если $a > b, c > d$, то $a + c > b + d$;
- если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
- если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;
- если $a, b, c, d > 0$ и $a > b, c > d$, то $ac > bd$;
- если $a, b, c > 0$, то $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{a}{b} < 1$.

Идея. Сложение неравенств и доминирование.

1. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли такое быть, что каждые два из них вместе внесли менее трети от общей суммы?

2. Докажите, что если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_6$, то $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \leqslant \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$.

Идея. Сравнение разности с 0 или частного с 1.

3. Пусть $a, b, c > 0$. Сравните числа $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{a+c}{b+c}$.

4. Пусть a и b такие натуральные числа, что сумма 2026 дробей $\dfrac{a+1}{b+1}, \dfrac{a+2}{b+2}, \ldots, \dfrac{a+2026}{b+2026}$ равна 2026. Чему может быть равно произведение этих 2026 дробей?

Идея. Огрубление.

5. Докажите, что для положительных x, y верно $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{2x+y} + \dfrac{y}{x+2y} \leqslant 1$.

6. Докажите неравенство для $a, b, c > 0$: $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}} + \dfrac{b}{\sqrt{c+a}} + \dfrac{c}{\sqrt{a+b}} > \sqrt{a+b+c}$.

Идея. Разложение на множители.

7. Известно, что $ab - 1 < a - b$, $ac - 1 < a - c$. Докажите, что $bc + 1 > b + c$.

Идея. Упорядочивание или рассмотрение наибольшего/наименьшего.

8. Докажите, что уравнение $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} = 1$ неразрешимо в положительных числах.

9. Сумма трёх положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

Идея. Чем число $0 < a < 1$ отличается от числа $a > 1$?

10. $0 < x, y \leqslant 1$. Докажите, что $x + y \geqslant 2xy$.

11. При $0 \leq x, y, z \leq 1$ докажите неравенство

$$\frac{x}{x^2 + y + z} + \frac{y}{x + y^2 + z} + \frac{z}{x + y + z^2} \geqslant 1.$$

Идея. Рассуждения от противного.

12. В кастрюле лежат 20 кусков шашлыка. Известно, что любые 11 из них в сумме весят больше 500 граммов, а любые 10 в сумме весят меньше 500. Докажите, что найдётся кусок шашлыка с весом от 45 до 50 г (включительно). Веса кусков шашлыка могут быть нецелыми.

Идея. Рассмотрение случаев

13. Докажите, что для любого a верно $1 + a^{10} + a^{20} + a^{30} > a^5 + a^{15} + a^{25}$.