Полуинварианты и счётчики

Определение. *Полуинвариант* — некий параметр в процессе, который изменяется по определённым правилам (обычно не уменьшается или не увеличивается).

Чаще всего полуинвариант используется для обоснования конечности или бесконечности процесса. При использовании полунивариантa полезны две следующие мысли:

- убывающая последовательность натуральных чисел конечна;
- невозрастающая последовательность натуральных чисел стабилизируется.

Если нужна оценка длительности процесса, то в таком случае помогает счётчик.

Определение. *Счётчик* — некий параметр в процессе, изменения которого можно оценить (снизу или сверху), за счёт чего получается дать оценку на число операций.

1. На доске написаны три числа. Каждую минуту они изменяются по следующему правилу: если на данный момент на доске находятся числа x, y, z, то они меняются на $2x - 2y + z - 1$, $2y - 2z + x - 1$, $2z - 2x + y - 1$.

(а) Докажите, что изначальный набор чисел никогда не повторится.

(б) Докажите, что однажды на доске появится отрицательное число.

2. По кругу написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту между двумя соседними числами пишут их НОД, а старые числа стирают. Докажите, что через какое-то время все числа станут равными.

3. Доказать, что в бесконечной последовательности целых чисел, попарно различных и больших единицы, найдутся 2025 чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.

4. Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами n непересекающихся отрезков.

5. В клетках таблицы 2025×2025 стоят 1 и -1. За один ход разрешается поменять знак всех чисел в одном столбце или одной строке. Докажите, что за несколько ходов можно добиться того, что суммы чисел во всех линиях будут положительными.

6. Девять фишек заполняют правый верхний угол 3×3 шахматной доски. За один ход можно передвинуть одну из фишек на соседнюю по стороне свободную клетку. За какое наименьшее число ходоввсе фишки можно гарантированно переместить в левый нижний угол 3×3?

7. В электронную таблицу, где две строки и n столбцов, в произвольном порядке записаны все натуральные числа от 1 до $2n$ (в каждой клетке — одно число). В полдень каждого дня компьютер случайным образом выбирает столбец, где число из верхней строки больше числа из нижней, и меняет эти два числа местами, а затем случайным образом переставляет числа в верхней строке. В момент, когда в каждом столбце верхнее число оказывается меньше нижнего, процесс заканчивается. Докажите, что такой процесс не может происходить дольше, чем n^2 дней.

8. Предложил Чёрт Богачу следующую схему: Богач всегда может поменять у Чёрта или 1 доллар на 75 рублей, или 77 рублей на 1 доллар. Исходно у Богача миллион рублей. Докажите, что миллион операций с Чёртом Богачу сделать не удастся.

9. В лесном пункте обмена можно обменять:

- апельсин — на две груши,
- яблоко и грушу — на апельсин,
- апельсин и грушу — на яблоко.

По случаю праздника в пункте устроили акцию: за каждый обмен в подарок выдают коллекционный фантик. У лисы есть 30 яблок, 30 груш и 30 апельсинов. Какое максимальное количество фантиков она может получить?