Полуинварианты и счётчики

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 20 февраля.

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень

1. **(а)** На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 100$. За один ход можно выбрать 2 разных числа и заменить меньшее на большее. Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

(б) В ряд слева направо стоят 10 коробок. В самой левой лежит 1 шарик, в следующей — 2, ..., в последней — 10. За один ход можно переложить любой шарик в любую коробку правее той, где он лежит. Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?

2. **(а)** В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \ldots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

(б) В фирме работает 10 сотрудников. Каждый месяц владелец повышает зарплату на 1 рубль ровно девятерым (по своему выбору). Как директору повышать зарплаты, чтобы сделать их одинаковыми?

3. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.

4. В стране N городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удалённый от него город B, оттуда — в самый удалённый от него город C и т.д. Докажите, что если C и A отличны, то путешественник никогда не вернётся в A.

Продвинутый уровень

5. Дано 3 бочки вместимостью по 300 литров, но в каждой находится только 100 литров воды. У Знайки есть нескончаемый источник воды и каждую минуту она делает одно из трёх действий:

- вылить из первой бочки 1 литр и налить 4 литра в третью бочку;
- вылить из второй бочки 2 литра и налить 1 литр в первую бочку;
- вылить из третьей бочки 7 литров и налить 2 литра во вторую бочку.

Какое максимальное количество минут может пройти до того момента, когда Знайка не сможет сделать ни одно из действий?

6. В 2026 ящиках лежит $1, 2, \ldots, 2026$ камней соответственно. За один ход можно выбрать несколько ящиков и забрать из них по одинаковому количеству камней. За какое наименьшее число ходов можно забрать все камни из всех ящиков?

7. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передаёт половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

8. По окружности расставлены действительные числа. Если четыре последовательно стоящих числа a, b, c, d таковы, что $(a - d)(b - c) > 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такие перестановки можно выполнить лишь конечное число раз.

9. Волк гоняется за Зайцем по Звериполии (в ней 100 городов). Оба используют только самолёты, которые курсируют ежедневно между некоторыми городами. Каждый самолёт отправляется утром и прилетает в город назначения вечером без посадок в других городах. С пересадками можно добраться из любого города в любой другой. Волк всегда знает, где сейчас Заяц, и поймает его, если окажется с ним в одном городе. Волк может лететь в любой день, Заяц не летает по воскресеньям. Докажите, что Волк может поймать Зайца не позднее, чем через два года.

10. При дворе короля Артура собрались $2N$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $N - 1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за Круглым Столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.