Пути, циклы и деревья

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 30 января.

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень

1. У царя Гвидона было 5 сыновей. Из всех его потомков посужской линии (сыновей, внуков, правнуков и т. д.) 52 имели ровно трёх сыновей, 67 имели четырёх сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько прямых потомков по мужской линии могло быть у царя Гвидона?

2. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

3. Из спичек сложен квадрат 8×8, сторона каждой клетки равна длине спички. Какое наименьшее число спичек нужно убрать, если граничные спички убирать нельзя и жук хочет, чтобы:

(а) с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спички;

(б) с любой клетки можно было дойти до какой-нибудь клетки на границе, не переползая через спички.

4. В математической олимпиаде участвуют несколько детей (хотя бы 5). Оказалось, что среди них нет трёх попарно знакомых, но в любой компании из пяти участников можно выбрать трёх людей, имеющих общего знакомого. После олимпиады $2n + 1$ детей выстроились по кругу. Докажите, что найдутся двое детей, которые стоят рядом, но не знакомы.

Продвинутый уровень

5. Дан связный граф, в котором есть вершины X и Y, кратчайший путь между которыми содержит n рёбер. Докажите, что рёбра графа можно покрасить в n цветов так, чтобы любой путь из X в Y проходил по рёбрам всех цветов.

6. **(Письменно)** **(а)** В графе степень каждой вершины не меньше 49. Докажите, что если в нём есть 2 вершины, кратчайший путь между которыми содержит 9 рёбер, то в нём хотя бы 200 вершин.

(б) В связном графе 2023 вершины, степень каждой из них не меньше 91. Докажите, что от любой вершины графа до любой другой можно добраться не более, чем по 62 рёбрам.

7. В стране 50 городов и 100 дорог между ними (каждая дорога соединяет два города). Из любого города можно добраться до другого. Докажите, что можно закрыть все дороги некоторого циклического маршрута так, чтобы по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого.

8. **(Письменно)** В государстве 90 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем есть не менее двух циклических маршрутов. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более, чем через 60 городов.

9. В стране 2025 городов. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причём он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется *захолустным*, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединённый дорогами как минимум с восемью захолустными.

10. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы 50 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что в графе есть простой путь, проходящий по всем вершинам.