

Инвариант

17 ноября 2025 г.

1. Разменный автомат меняет
 - (а) 1 монету на 3 других;
 - (б) 2 монеты на 16 монет или 5 монет на 26 монет;Можно ли в каком-то случае с его помощью поменять 5 монет на 2026 монет?
2. Изначально на доске написаны целые числа от 1 до 100. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b , и заменить их на числа $\frac{7a-3b}{4}$ и $\frac{7b-3a}{4}$. Можно ли такими операциями получить на доске числа от 2 до 101?
3. Шахматный король ходит в любую соседнюю клетку по стороне или диагонали. Однажды король обошёл все клетки доски по одному разу, начав в левом нижнем и закончив в правом верхнем углу шахматной доски. Мог ли он сделать 20 диагональных ходов?
4. Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?
5. На столе лежат 4 кучки из 101, 102, 103 и 104 камней. За один ход разрешается забрать из некоторой кучки 3 камня (если они есть в ней) и добавить по 1 камню во все остальные кучки. Можно ли за несколько ходов получить кучки с 99, 100, 104 и 107 камнями?
6. **(Письменно)** Петя и Вася поочерёдно (начинает Петя) закрашивают в квадрате 6×6 по одной клетке. Закрасив очередную клетку, игрок записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Петя и Вася складывают числа, записанные во всех клетках. Если полученная сумма чётная выигрывает Петя, а если нечётная — Вася. Кто выигрывает при правильной игре обоих игроков? (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*)
7. Объясните, какие есть ошибки в решении, и приведите правильное решение.

Условие: «Дана клетчатая доска размером 4×4 с шахматной раскраской. За один шаг можно выбрать на этой доске произвольный квадрат размером 2×2 и изменить цвет каждой его клетки на противоположный. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?»

Решение: «Заметим, что при перекрашивании любого квадрата 2×2 в любой строке доски остаются две белые и две чёрные клетки. Следовательно, все клетки не могут оказаться одного цвета».

8. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$. За ход можно выбрать любые два числа a и b и заменить их на число $\frac{ab}{a+b}$. Какое число может остаться на доске после 99-ти операций?