

Инвариант

17 ноября 2025 г.

Определение. *Инвариант* — некий неизменный параметр в процессе (например, сумма, произведение, периметр, площадь, делимость на некоторое число и т.п.).

1. Круг разделён на шесть секторов, пронумерованных по часовой стрелке числами от 1 до 6, в каждом из которых лежит число фишек, равное номеру сектора. За один ход разрешается снять по одной фишке с двух любых соседних секторов. Можно ли сделать количества фишек во всех секторах равными?
2. На доске 8×8 в левом нижнем углу стоит фишка. За один ход её можно сдвинуть в соседнюю по стороне клетку. Через несколько ходов фишка оказалась в правом верхнем углу. Могла ли она сделать в сумме 2026 ходов влево и вправо?
3. На каждой клетке-треугольничке треугольной доски со стороной 5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и приземляются на соседние (по стороне) клетки этой доски. Докажите, что тогда найдутся по крайней мере 5 пустых клеток.
4. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 2025$. Петя и Вася ходят по очереди (начинает Петя). За ход можно стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Вася выиграет, если все числа на доске станут нулями. Может ли Петя ему помешать при правильной игре обоих игроков?
5. На сосне растёт 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных — вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. В конце концов на сосне останется один фрукт. Какой?
6. На Марсе есть 20 амёб типа А, 21 амёба типа В и 22 амёбы типа С. Любые две амёбы двух разных типов могут слиться и образовать амёбу третьего типа. В конце осталась ровно одна амёба. Какая?
7. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a + 1$ и $b + 1$; второй по карточке с чётными числами a и b выдаёт карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдаёт карточку с числами a, c . Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки $(5, 19)$ получить карточку $(1, 1988)$?

8. Набор чисел a, b, c каждую секунду заменяется на $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. В начале имеется набор чисел 2023, 2024, 2025. Может ли через некоторое время получиться набор:
- (а) 2022.5, 2024, 2025.5;
 - (б) 2023, 2025, 2026;
 - (в) 2021, 2024, 2027?
 - (г) Какие наборы вообще могут получиться?
9. На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешилось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2013. Каковы были два остальных числа?
10. На доске написаны натуральные числа от 1 до 101. Разрешается стереть любые два числа a, b и записать вместо них одно число $F(a, b)$. Процесс продолжается, пока не останется одно число. Чему оно может быть равно, если:
- (а) $F(a, b) = a + b$;
 - (б) $F(a, b) = a + b - 1$;
 - (в) $F(a, b) = ab$;
 - (г) $F(a, b) = ab + a + b$?