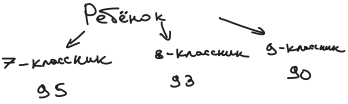
Перечислительная комбинаторика

У1. В Яндекс.Кружке в параллелях 7–9 классов занимаются 95 семиклассников, 93 восьмиклассника и 90 девятиклассников. Сколькими способами можно выбрать одного школьника из 7–9 классов в качестве капитана на турнир математических боёв?



Общее число вариантов: $95+93+90=278$.

Правило суммы.

У2. В Яндекс.Кружке в параллелях 10–11 классов занимаются 88 десятиклассников и 92 одиннадцатиклассника. Сколькими способами можно выбрать команду из одного десятиклассника и одного одиннадцатиклассника на Кубок России по математическим играм?

команда

десятиклассник и одиннадцатиклассник

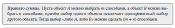
88 вариантов $\circledast$ 92 варианта

↑

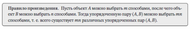
Правило произведения

$$88 \cdot 92 = (90-2)(90+2) = 90 \cdot 90 - 2 \cdot 2 = 8096$$

Правило суммы VS Правило произведен.



Правило суммы. Пусть объект A можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо A, либо B» можно сделать $(m+n)$ способами.



Правило произведения. Пусть объект A можно выбрать m способами, после чего объект B можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (A, B) можно выбрать mn способами, т. е. всего существует mn различных упорядоченных пар (A, B).

У3. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?

одна цифра →

1 место

2 место

3 место

7 ␣ ␣

9 · 9 = 81 вариант

7 выбрать нельзя

␣ 7 ␣

8 · 9 = 72 варианти

0 и 7 выбрать нельзя

␣ ␣ 7

8 · 9 = 72 варианти

Ответ: 81 + 72 + 72 = 225 вариантов.

У4. В Яндекс.Кружке среди учеников 3 Ани, 4 Бори и 5 Вик. Сколькими способами их них можно выбрать двух человек с разными именами?

Две разных имени

Аня и Боря

3 варианти

4 варианти

3 · 4 = 12 вариантов

Боря и Вика

4 · 5 = 20

Вика и Аня

Аня и Вика

5 · 3 = 15

Ответ: 12 + 20 + 15 = 47 вариантов.

У5. Сколько существует семизначных чисел из различных цифр?

␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣ ␣

9 9 8 7 6 5 4

без 0

без первой цифры

Правило последовательного выбора

Ответ: 9 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 544320.

У6. В Яндекс.Кружке 4 лектора. Сколькими способами можно назначить 4 лекторов на 4 февральские лекции, если каждую лекцию проводит один преподаватель, и каждый препоаователь должен провести ровно одну лекцию?

1 лекция 2 лекция 3 лекция 4 лекция

␣ ␣ ␣ ␣

4 · 3 · 2 · 1

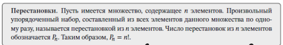
без 1-го лектора

запрет на первых двух лекторов

запрет на трёх лекторов

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Ответ: 4!.



Перестановки. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из всех элементов данного множества по одному разу, называется перестановкой из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n. Таким образом, $P_n = n!$.

n разных объектов, их нужно выложить в ряд.

Сколько способов это сделать?

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

$0! = \boxed{1}$

посадить

0 гостей на 0 мест

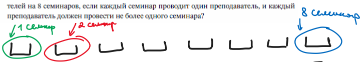
1 вариант — никого никуда не сажать

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

У7. В Яндекс.Кружке 12 семинаристов. Сколькими способами можно назначить преподавателей на 8 семинаров, если каждый семинар проводит один преподаватель, и каждый преподаватель должен провести не более одного семинара?



$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{12!}{4!}$$

Размещения без повторений. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется размещением без повторений из n элементов по k элементов (или просто размещением из n по k). Их количество обозначается A_n^k. Таким образом, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{12}^8 = \frac{12!}{(12-8)!} = \frac{\boxed{12!}}{\boxed{4!}}$$

перестановки из 12 эл-ов

перестановки из 4 эл-ов

не важна последовательность последних 4 элементов

У8. В Яндекс.Кружке 18 ассистентов. Сколькими способами можно назначить ассистентов на 12 занятий, если на каждом занятии должен быть один семинарист, и каждый ассистент может быть на любом количестве занятий?

$$18 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 18 = 18^{12} \qquad \overline{A_{18}^{12}} = 18^{12}$$

Размещения с повторениями. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k элементов данного множества, которые могут повторяться, называется размещением с повторениями из n элементов по k элементов (или просто размещением с повторениями из n по k). Их количество обозначается $\overline{A_n^k}$. Таким образом, $\overline{A_n^k} = n^k$.

Повтор объектов VS Объекты не повторяются

↓ ↓

Правило произведения Последовательный выбор

У9. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску:

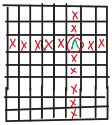
(а) 2 разноцветных ладьи;

(б) 2 белых ладьи;

(в) 4 белых ладьи

так, чтобы они не били друг друга? (*Ладьи одного цвета не отличимы друг от друга.*)

а)



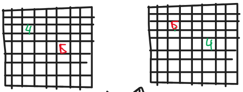
$$\boxed{64} \cdot \boxed{49} = 3136.$$

белая ладья

на 1+7+7 вариантов меньше, чем для чёрной ладьи.

чёрная ладья

б) Ответ в 2 раза меньше, чем в пункте а).



Один и тот же вариант для одноцветных ладей.

Ответ: $\frac{64 \cdot 49}{2} = \frac{3136}{2} = 1568.$

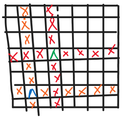
в) Пусть ладьи 4 разных цветов, тогда число способов поставить 4 небьющие друг друга ладьи:

5 свободных строк и 5 свободных столбцов

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot \boxed{25}$$

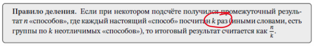
2 строки и 2 столбца заняты

6 · 6 = 36 вариантов для третьей ладьи



Ответ: $\boxed{\frac{64\cdot49\cdot36\cdot25}{\boxed{4!}}}$

количество способов перекрашивать между собой одноцветные ладьи

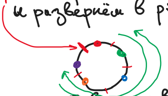


Правило деления. Если при некотором подсчёте получился промежуточный результат n «способов», где каждый настоящий «способ» посчитан k раз (иными словами, есть группы по k неотличимых «способов»), то итоговый результат считается как $\frac{n}{k}$.

У10. Сколько существует разных ожерелий из 5 бусинок разных цветов? *(Ожерелья, получающиеся поворотом и переворотом считаются одинаковыми.)*

Разрежем ожерелье и развернём в ряд.

5! рядов



$$\frac{5!}{5\cdot2}=\frac{4!}{2}$$

5 вариантов разреза

2 варианта переворота ряда

Число ожерелий из n бусинок разных цветов: $\frac{n!}{n\cdot2}=\frac{(n-1)!}{2}$

У11. Сколько способов разбить на пары 14 детей? *(Порядок детей в паре не важен.)*

1. Алексеев
2. Борисов
3. Владимиров
4. Галкин
5. Дятлов
6. Егоров
7. Кузьмин
8. Морозов
9. Попов
10. Рыбкин
11. Суворов
12. Тупиков
13. Уткин
14. Шубин

13 вариантов составить пару Алексееву

11 вариантов составить пару следующему невыбранному по алфавиту после Алексеева и того, кто с ним в паре

...

$13\cdot11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1=13!!$

$n\boxed{!!}=n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots$

разность между соседними сомножителями 2

II решение

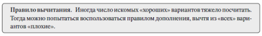
Выпишем всех детей в ряд в некотором порядке: $\underbrace{\text{Уткин Борисов}}_{1-2}$ $\underbrace{\text{Попов Егоров}}_{3-4}$ ... $\underbrace{\quad\quad}_{13-14}$

способы выписать детей в ряд

$$\frac{\boxed{14!}}{\boxed{7!}\cdot\boxed{(2!)^7}}=\frac{14!}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(\boxed{2^7})}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{14\cdot12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}=13\cdot11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1$$

порядок пар не важен

порядок в каждой паре не важен



Правило вычитания. Иногда число искомых «хороших» вариантов тяжело посчитать. Тогда можно попытаться воспользоваться правилом дополнения, вычтя из «всех» вариантов «плохие».

„Все" − „плохие" = „хорошие"

У12. Сколько существует трёхзначных чисел, в которых есть хотя бы одна цифра 7?

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{хотя бы одна цифра 7} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \text{ровно одна цифра 7} & \text{ровно две цифры 7} & \text{ровно три цифры 7} \end{tikzcd}$$

Проще через разность

Все трёхзначные − трёхзначные без 7

$9\cdot10\cdot10-\boxed{8}\cdot\boxed{9}\cdot\boxed{9}=900-648=252.$

нельзя ставить 7

всё, кроме 0 и 7

Ответ: 252 варианта.

У13. Сколько существует пятизначных чисел, в которых есть одинаковые цифры?

Пятизначные числа, где есть одинаковые цифры = Пятизначные числа − Пятизначные числа, где все цифры разные

Ответ: $62784 = 9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 - 9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6$

У14. Сколько существует двоичных кодов длины 8, в которых ровно 3 единицы?

⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔

Код из пяти нулей и трёх единиц

Выбираем три позиции для единиц (нули ставим на оставшиеся позиции)

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{\boxed{3!}} = \frac{A_8^3}{3!} = \frac{\frac{8!}{(8-3)!}}{3!} = \frac{8!}{(8-3)!\cdot3!}$$

не важен порядок выбора позиций

Сочетания без повторений. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Его произвольное (неупорядоченное) подмножество, составленное из k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k. Таким образом, $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

У15. Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров?

Выбор 3 маляров из 6 маляров: C_6^3

Выбор 4 штукатуров из 8 штукатуров: C_8^4

Ответ: $C_6^3\cdot C_8^4$.

У16. Чему равен коэффициент при x^4y^8 после раскрытия скобок в выражении $(x+y)^{12}$?

$$(x+y)^{12} = (x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$$

x^4y^8
$x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot y\cdot x\cdot y$
$y\cdot y\cdot y\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot y$
…

коэффициент x^4y^8 число слов длины 12, в которых 4 „x" и 8 „y"

Выбор 4 позиций из 12 для $x = C_{12}^4$.

C_n^k – биномиальный коэффициент

Бином Ньютона: $(x+y)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1}x^{n-1}y + C_n^{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^k x^k y^{n-k} + \ldots + C_n^0 x^0 y^n$

Полиноминальный коэффициент. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Пусть нужно покрасить его элементы в m цветов. Количество элементов соответствующего цвета должно быть $k_1, k_2, \dots, k_m$. Количество вариантов сделать это считается с помощью полиноминального коэффициента $P_{(k_1,k_2,\dots,k_m)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$

У18. Чему равен коэффициент при x^4y^8 после раскрытия скобок в $(x + y + 1)^{20}$?

$(x+y+1)^{20} = \ldots x^4y^8$

$\bigcirc\ x^4\cdot y^8\cdot 1^8$

Число „слов" длины 20,
в которых 4 „x", 8 „y" и 8 „1".

$$\frac{12!}{4!\cdot 8!\cdot 8!}$$

если бы все буквы были разные

повторы x

повторы y

повторы 1

У17. *Анаграммой* называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов:
(а) ТОЧКА;
(б) ПРЯМАЯ;
(в) БИССЕКТРИСА?

а) Т, О, Ч, К, А. Из них можно составить 5! слов.

б) $\frac{6!}{2!}$

общее количество букв

повторы буквы „Я"

в) $\frac{11!}{2!\cdot 3!}$

общее число букв

повторы букв „И"

повторы букв „С"