

Перечислительная комбинаторика

Правило суммы. Пусть объект A можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо A , либо B » можно сделать $(m + n)$ способами.

Правило произведения. Пусть объект A можно выбрать m способами, после чего объект B можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (A, B) можно выбрать mn способами, т. е. всего существует mn различных упорядоченных пар (A, B) .

- У1. В Яндекс.Кружке в параллелях 7–9 классов занимаются 95 семиклассников, 93 восьмиклассника и 90 девятиклассников. Сколькими способами можно выбрать одного школьника из 7–9 классов в качестве капитана на турнир математических боёв?
- У2. В Яндекс.Кружке в параллелях 10–11 классов занимаются 88 десятиклассников и 92 одиннадцатиклассника. Сколькими способами можно выбрать команду из одного десятиклассника и одного одиннадцатиклассника на Кубок России по математическим играм?
- У3. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?
- У4. В Яндекс.Кружке среди учеников 3 Ани, 4 Бори и 5 Вик. Сколькими способами из них можно выбрать двух человек с разными именами?

Правило последовательного выбора. Пусть набор $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ формируется в результате последовательного выбора k элементов, причём

- элемент x_1 можно выбрать n_1 способами,
- при любом x_1 элемент x_2 можно выбрать n_2 способами,
- при любых x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать n_3 способами,
- ...,
- при любых $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ элемент x_k можно выбрать n_k способами.

Тогда весь набор можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Перестановки. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из всех элементов данного множества по одному разу, называется перестановкой из n элементов. Число перестановок из n элементов обозначается P_n . Таким образом, $P_n = n!$.

Размещения без повторений. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *размещением без повторений из n элементов по k элементов* (или просто *размещением из n по k*). Их количество обозначается A_n^k . Таким образом,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещения с повторениями. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k элементов данного множества, которые могут повторяться, называется *размещением с повторениями из n элементов по k элементов* (или просто *размещением с повторениями из n по k*). Их количество обозначается $\overline{A_n^k}$. Таким образом, $\overline{A_n^k} = n^k$.

- У5. Сколько существует семизначных чисел из различных цифр?
- У6. В Яндекс.Кружке 4 лектора. Сколькими способами можно назначить 4 лекторов на 4 февральские лекции, если каждую лекцию проводит один преподаватель, и каждый преподаватель должен провести ровно одну лекцию?
- У7. В Яндекс.Кружке 12 семинаристов. Сколькими способами можно назначить преподавателей на 8 семинаров, если каждый семинар проводит один преподаватель, и каждый преподаватель должен провести не более одного семинара?
- У8. В Яндекс.Кружке 18 ассистентов. Сколькими способами можно назначить ассистентов на 12 занятий, если на каждом занятии должен быть один ассистент, и каждый ассистент может быть на любом количестве занятий?

Правило деления. Если при некотором подсчёте получился промежуточный результат n «способов», где каждый настоящий «способ» посчитан k раз (иными словами, есть группы по k неотличимых «способов»), то итоговый результат считается как $\frac{n}{k}$.

- У9. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску:
- (а) 2 разноцветных ладьи;
 - (б) 2 белых ладьи;
 - (в) 4 белых ладьи
- так, чтобы они не били друг друга? (*Ладьи одного цвета не отличимы друг от друга.*)
- У10. Сколько существует разных ожерелий из 5 бусинок разных цветов? (*Ожерелья, получающиеся поворотом и переворотом считаются одинаковыми.*)
- У11. Сколько способов разбить на пары 14 детей? (*Порядок детей в паре не важен.*)

Правило вычитания. Если число искомых «хороших» вариантов посчитать сложнее, чем количество не подходящих, то можно воспользоваться правилом вычитания, вычтя из «всех» вариантов «плохие».

- У12. Сколько существует трёхзначных чисел, в которых есть хотя бы одна цифра 7?
- У13. Сколько существует пятизначных чисел, в которых есть одинаковые цифры?

Сочетания без повторений. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Его произвольное (неупорядоченное) подмножество, составленное из k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k элементов*. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k . Таким образом, $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

- У14. Сколько существует двоичных кодов длины 8, в которых ровно 3 единицы?
- У15. Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если всего есть 6 маляров и 8 штукатуров?
- У16. Чему равен коэффициент при x^4y^8 после раскрытия скобок в выражении $(x + y)^{12}$?

Полиномиальный коэффициент. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Пусть нужно покрасить его элементы в m цветов. Количество элементов соответствующего цвета должно быть $k_1, k_2, \dots, k_m$. Количество вариантов сделать это считается с помощью полиномиального коэффициента $P_{(k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$

- У17. Анаграммой называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов:
- (а) ТОЧКА;
 - (б) ПРЯМАЯ;
 - (в) БИСSEКТРИСА?
- У18. Чему равен коэффициент при x^4y^8 после раскрытия скобок в выражении $(x + y + 1)^{20}$?