

Графы–1: семинар

1. (**Устная задача**) Известно, что у графа 6 вершин и их степени равны 1, 1, 1, 2, 2, 3. Нарисуйте три различных простых графа с таким набором степеней.
2. (**Устная задача**) Какие из следующих графов изоморфны:
 - (а) Вершины графа — вершины октаэдра, рёбра — рёбра октаэдра.
 - (б) Вершины — клетки доски 2×3 (кроме центральной), ребро — ход ладьи.
 - (в) Вершины — грани куба, они связаны ребром если у них есть общая сторона.
 - (г) Вершины графа — вершины шестиугольника, рёбра — стороны шестиугольника.
 - (д) Вершины — числа от 1 до 6, ребром связаны числа, которые не делятся друг на друга.
 - (е) Вершины — трёхбуквенные слова из букв И, К, С, рёбра связывают слова, получаемые перестановкой двух соседних букв.
3. (**Устная задача**) В некотором государстве 40 городов и 73 автодороги, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиасообщение, исходя из принципа экономии: между двумя городами открывается прямой авиарейс тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиарейсов будет открыто?
4. (**Устная задача**) У Тома Сойера есть пустой клетчатый квадрат 5×5 . Том Сойер в каком-то порядке вписывает в каждую пустую клетку количество граничащих с нею (по стороне) пустых клеток. Чему будет равна сумма всех чисел в квадрате, когда все клетки будут заполнены?
5. (**Письменная задача**) В Яндекс.Кружке учатся 85 учеников, среди которых есть и мальчики, и девочки. Каждый мальчик сказал: «У меня подруг на одну больше, чем друзей-мальчиков». Каждая девочка сказала: «У меня друзей-мальчиков на одного больше, чем подруг». Докажите, что чья-то дружба не взаимна.
6. (**Устная задача**) В Яндекс.Кружке 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.
7. (**Устная задача**) Можно ли все диагонали и стороны правильного 2025-угольника раскрасить в 2024 цвета таким образом, чтобы все отрезки, выходящие из одной вершины, были разного цвета?
8. (**Устная задача**) У Барона Мюнхгаузена 6 сыновей, а всего 77 прямых потомков по мужской линии. Барон утверждает, что если у его прямого потомка есть сыновья, то их 2 или 6. Не ошибается ли барон?
9. (**Письменная задача**) В Связной стране N городов. Некоторые города Связ-

ной соединены двусторонними авиарейсами. Известно, что можно построить маршрут между любыми двумя городами (возможно, с пересадками). Из четырёх городов выходит по 2025 авиарейсов, а из остальных городов — по 2024. В стране закрыли один авиарейс. Докажите, что граф авиарейсов Связной не мог после этого состоять из двух компонент связности с одинаковыми наборами степеней вершин.

10. (**Устная задача**) После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).