

Графы–1

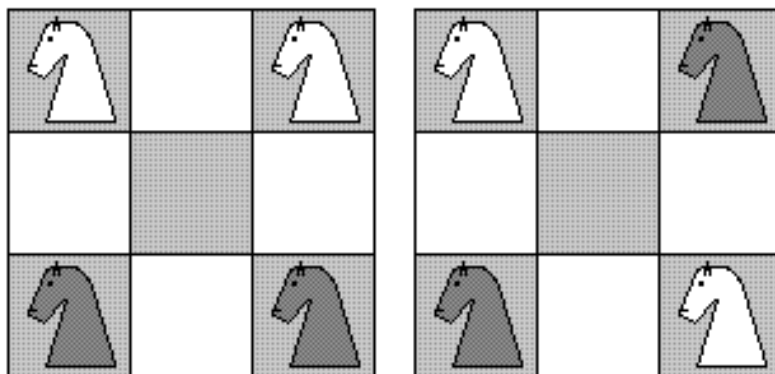
М. Д. Кузнецов

Яндекс.Кружок

8 октября 2025 г.

Задача 1

Условие: Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, расположить их так, как показано на правом рисунке?
(Кони не обязательно ходят сначала белый, потом чёрный. Выходить за пределы поля не разрешается.)

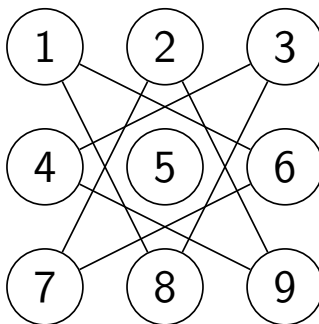


Задача 1

Решение: Пронумеруем клетки поля 3×3

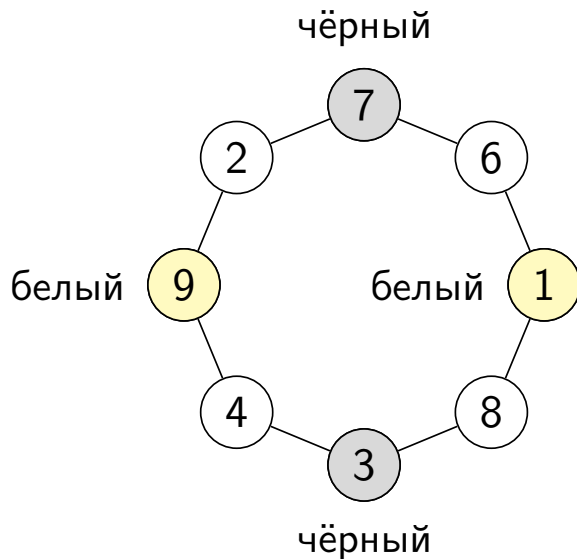
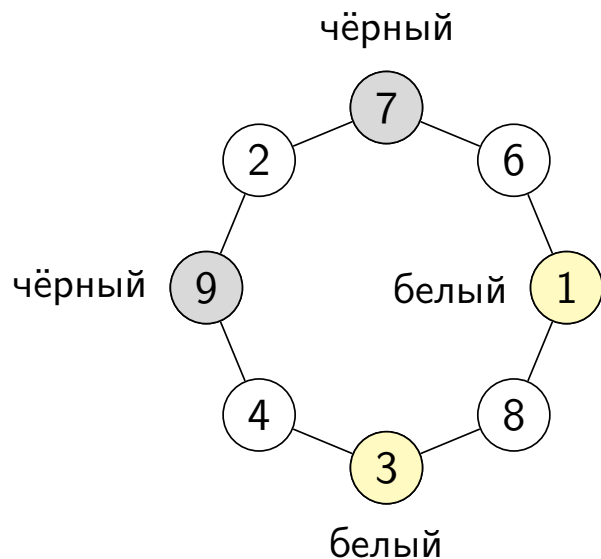
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Граф возможных ходов коня:



Наблюдение: Граф является циклом из 8 вершин.

Задача 1



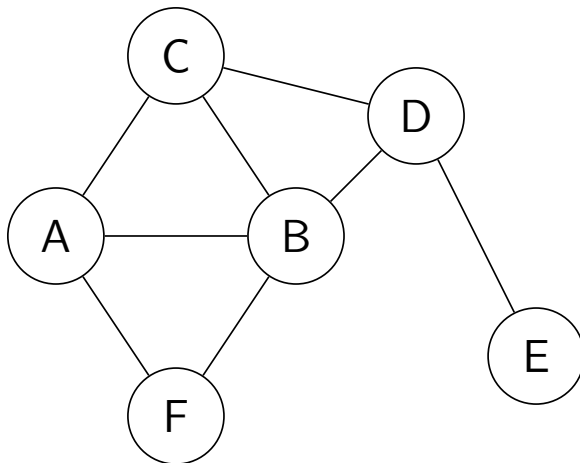
Наблюдение: Кони не могут перепрыгивать через «соседних» коней, поэтому из первого расположения нельзя получить второе.

Что такое граф?

Определение

Граф — это множество пар объектов (*вершин графа*).

Пары соединены *рёбрами*, если удовлетворяют определённому правилу.

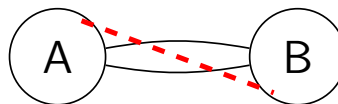
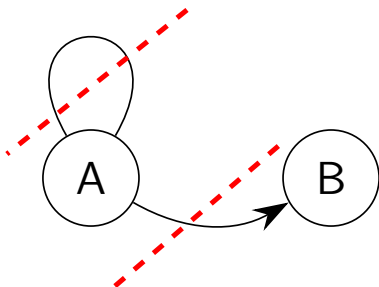


Примеры из жизни:

- Схема метро
- Социальные связи
- Компьютерная сеть

Простой граф:

- Неориентированный
- Без петель
- Без кратных рёбер

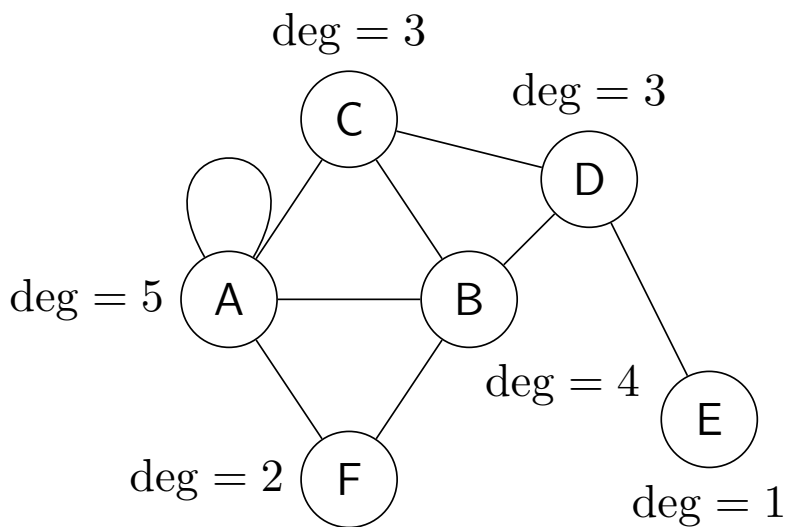


Степень вершины графа

Определение

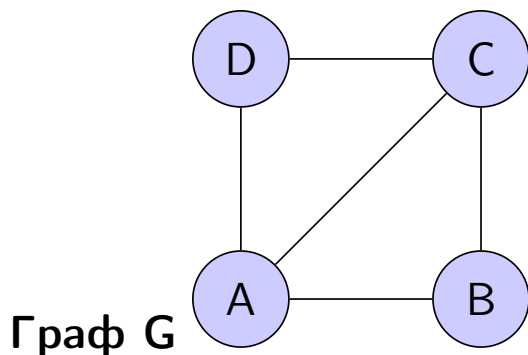
Степенью вершины v ($\deg(v)$) называется количество рёбер, инцидентных вершине графа.

При подсчёте степени вершины *ребро-петля* учитывается дважды.

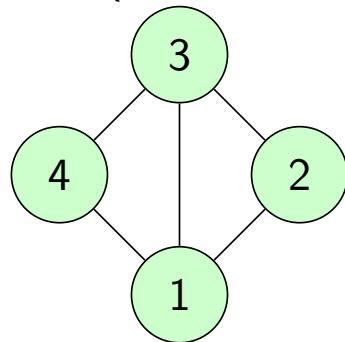


Определение

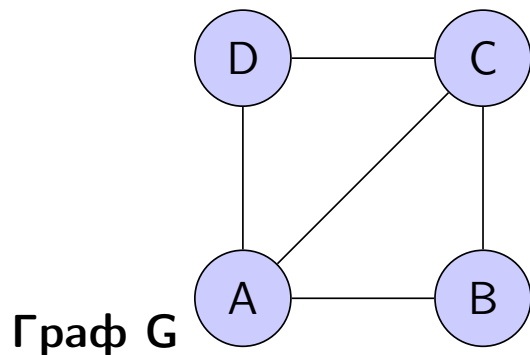
Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f : V_1 \rightarrow V_2$ такая, что любые две вершины u и v смежны в G_1 тогда и только тогда, когда $f(u)$ и $f(v)$ смежны в G_2 .



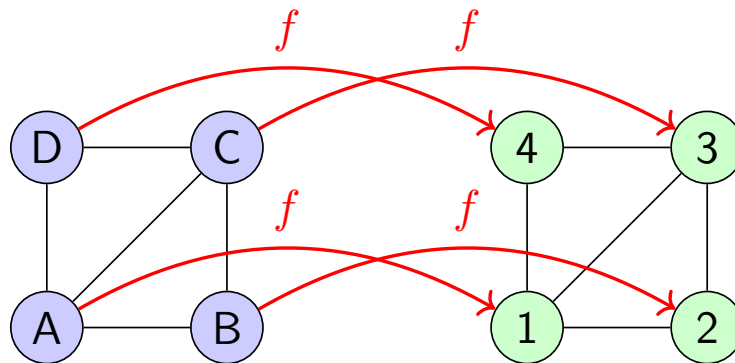
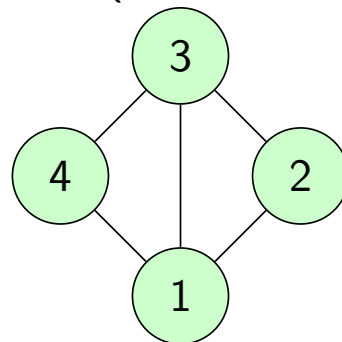
Граф H (изоморфен G)



Изоморфизм графов



Граф H (изоморфен G)



Изоморфизм $f: A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, C \rightarrow 3, D \rightarrow 4$

Задача 2

- ❶ Некоторые из 7 городов соединены железными дорогами. Докажите, что существуют 2 города, из которых выходит одинаковое количество дорог.
- ❷ Докажите, что в любой компании из 7 человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этой компании.
- ❸ 7 футбольных команд играют однокруговой турнир (т. е. каждая с каждой будет играть по одному разу). Докажите, что в любой момент времени есть две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.
- ❹ В многограннике 7 граней. Докажите, что найдутся две грани многогранника с одинаковым количеством вершин.

Задача 2

Решение: Рассмотрим граф железных дорог/знакомств/футбольного турнира/соседств граней многогранника. В нём степени вершин могут принимать значения от 0 до 6, но вершины степени 0 и 6 в графе вместе быть не могут.

Лемма о рукопожатиях

Лемма о рукопожатиях

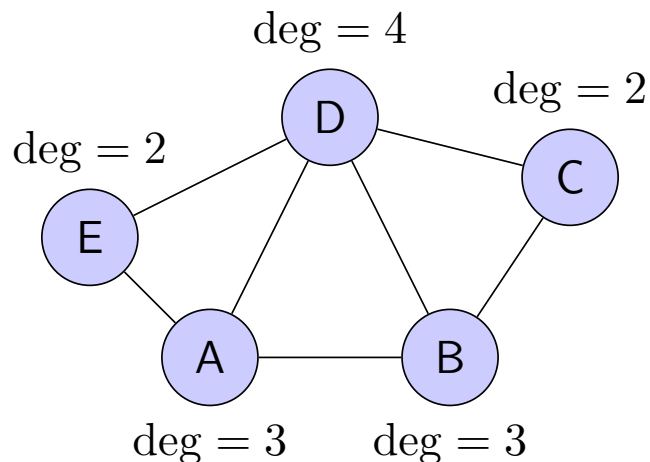
Сумма степеней всех вершин неориентированного графа равна удвоенному количеству рёбер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Следствие

В неориентированном графе чётное количество вершин с нечётной степенью.

Лемма о рукопожатиях



- Сумма степеней: $3 + 3 + 2 + 4 + 2 = 14$
- Количество рёбер: 7
- Проверка: $2 \cdot 7 = 14$
- Вершины с нечётной степенью: A (3), B (3) — их 2 (чётное число)

Задача 3

Условие: В государстве 111 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Задача 3

Условие: Рассмотрим граф, в котором города — вершины, дороги — рёбра. По лемме о рукопожатиях число дорог равно половине суммы степеней вершин: $\frac{111 \cdot 4}{2} = 222$.

Задача 4

Условие: В Яндекс.Кружке 85 учеников. Может ли у каждого ученика быть по 3 друга (дружба взаимна)?

Задача 4

Решение: Предположим, что такой кружок существует. Рассмотрим граф, в котором ученики — вершины, дружба — рёбра. В нём нечётное число вершин (85) с нечётной степенью, чего не может быть по следствию из леммы о рукопожатиях.

Задача 5

Условие: У марсиан бывает только нечётное число рук. Однажды все марсиане взяли за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан чётно.

Задача 5

Решение: Рассмотрим граф, в котором марсиане — вершины, рукопожатия — рёбра. Тогда общее количество рук у марсиан (сумма степеней вершин графа) чётно, поскольку является удвоенным числом рукопожатий-ребёр. Сумма целых чисел чётна, если в ней чётное количество нечётных слагаемых, что и требовалось доказать.

Задача 6

Условие: Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый отрезок пересекался с тремя другими?

Задача 6

Решение: Рассмотрим граф, в котором отрезки — вершины, ребро соединяет пересекающиеся отрезки. Если указанная в задаче конструкция существует, то должен существовать граф, в котором 9 вершин степени 3, но такого графа нет по следствию из леммы о рукопожатиях.

Задача 7

Условие: В стране из каждого города выходит три дороги. Может ли общее количество дорог равняться 1000?

Задача 7

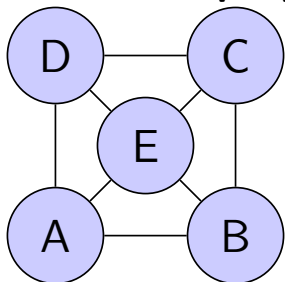
Решение: Пусть в стране n городов. Рассмотрим граф, в котором города — вершины, дороги — рёбра. Тогда количество ребёр-дорог в нём — половина суммы степеней вершин: $\frac{3n}{2}$. Число $\frac{3n}{2}$ кратно 3, а 1000 не кратно 3, поэтому такого графа не может существовать.

Связность графа

Определение

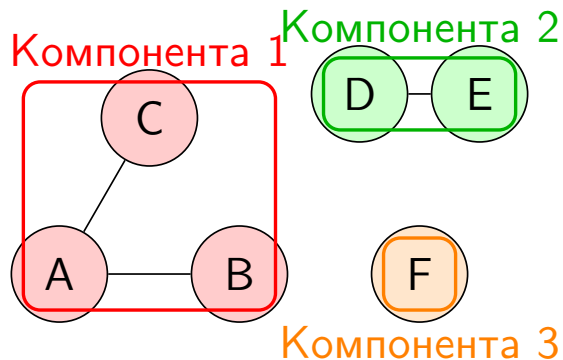
Граф, в котором от каждой вершины можно добраться до каждой, называется **связным**. Если граф **несвязен**, то он распадается на несколько частей, внутри каждой из которых можно от каждой вершины добраться до каждой. Такая часть называется **компонентой связности**.

Связный граф



1 компонента связности

Несвязный граф



Задача 8

Условие: На лекцию пришли 24 школьника, среди них отличница Дора. Преподаватель спросил у каждого из них, кроме Доры, сколько у них знакомых среди остальных пришедших. В ответ прозвучали только числа 3 и 5. Докажите, что Дора с кем-нибудь знакома.

Задача 8

Решение: Пусть Дора ни с кем не знакома. Рассмотрим граф, в котором школьники — вершины, знакомства — рёбра. Если Дора — изолированная вершина, то оставшиеся 23 школьника образуют граф, в котором нечётное число вершин (23) с нечётной степенью (3 или 5). Такого графа не может быть по следствию из леммы о рукопожатиях. Получаем противоречие, поэтому Дора с кем-нибудь знакома.

Задача 9

Условие: В Неизвестной стране из города Столичный выходит 21 двусторонний авиарейс, а из города Дальний — ровно один. Из остальных городов выходит по 20 авиарейсов. Докажите, что из города Дальний можно попасть (возможно, с пересадками) в Столичный.

Решение: Рассмотрим граф, в котором города — вершины, авиарейсы — рёбра. Пусть Дальний и Столичный находятся в разных компонентах связности. Тогда в компонентах связности Дальнего и Столичного нечётное число вершин с нечётной степенью (по одной). Этого не может быть, т.к. в таком случае для этих компонент связности не выполняется следствие из леммы о рукопожатиях. Получаем противоречие, поэтому из Дальнего можно добраться в Столичный.

Задача 10

Условие: В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Между двумя городами A и B этой страны существует ровно один путь по дорогам, который проходит через каждый город не более одного раза. Может ли из каждого города выходить чётное число дорог?

Задача 10

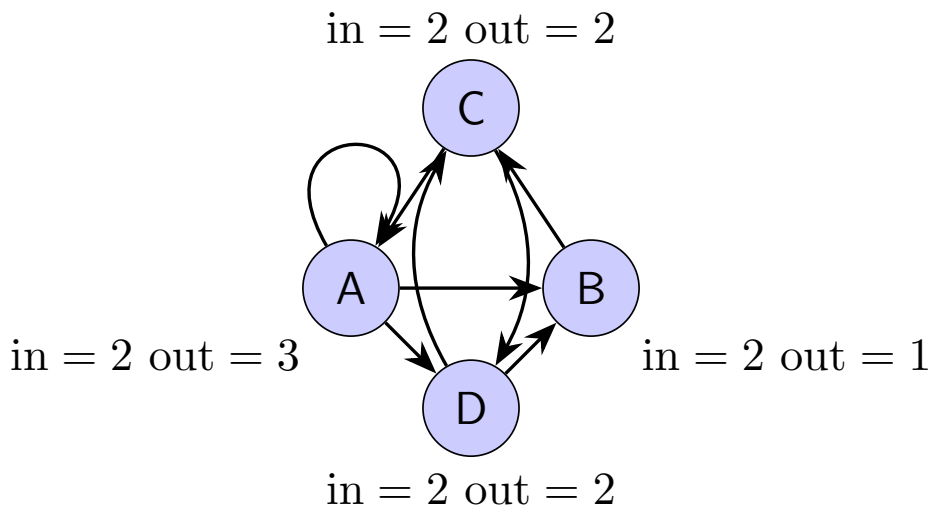
Условие: Рассмотрим граф, в котором города — вершины, дороги — рёбра. Предположим, что из каждого города выходит чётное число дорог. Заметим, что любое ребро на единственном пути из A в B должно быть **мостом**, т.е. при его удалении одна компонента связности распадается на две. Удалим любое ребро $C - D$ на пути из A в B (возможно, какие-то из вершин C, D совпали с вершинами A, B). Тогда в компонентах связности A и B будет по одной вершине с нечётной степенью, чего не может быть по следствию из леммы о рукопожатиях. Получаем противоречие.

Ориентированные графы

Определение

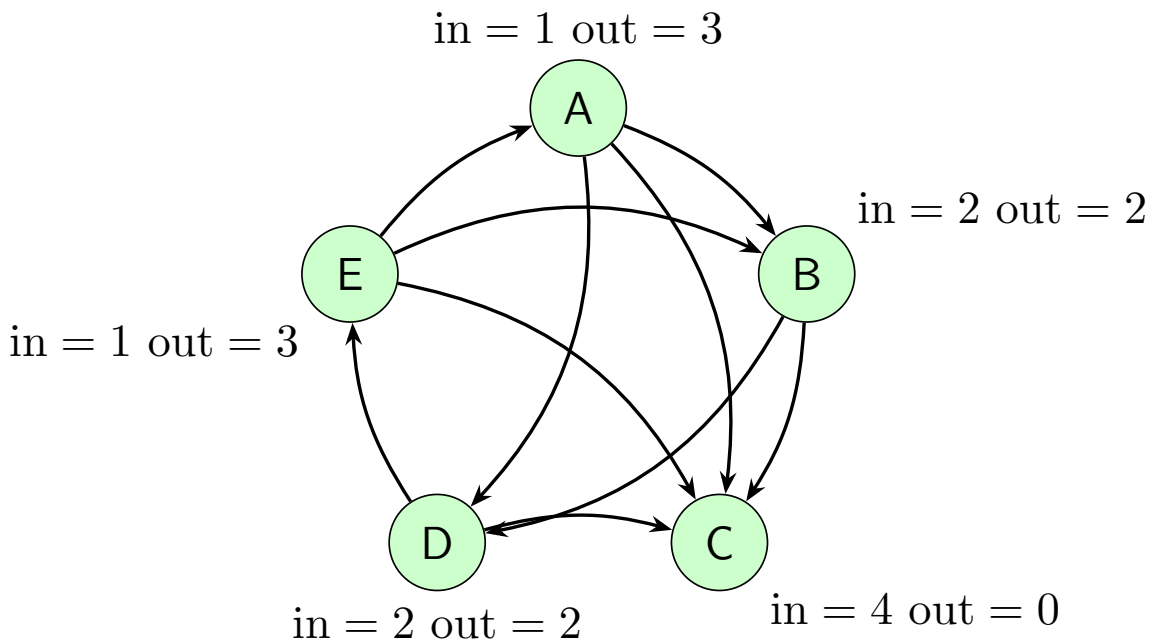
Граф называется **ориентированным**, если на каждом из его рёбер задано направление (будем называть такие рёбра **стрелками**). Могут быть стрелки из v в v (петли) и пары стрелок из v в u и из u в v .

Ориентированный граф



Турнир

Турнир — это полный ориентированный граф (между любой парой различных вершин есть ровно одна ориентированная стрелка).



Турнир

Ориентированная лемма о рукопожатиях

Ориентированная лемма о рукопожатиях

В ориентированном графе сумма **исходящих** степеней равна сумме **входящих** степеней:

$$\sum_{v \in V} \text{out}(v) = \sum_{v \in V} \text{in}(v)$$

Задача 11

Условие: В форуме участвовали 19 учёных. После форума каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этого форума. Могло ли случиться, что каждый получил ровно по 3 письма?

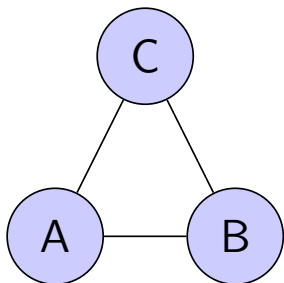
Задача 11

Решение: Предположим, что описанная ситуация могла произойти. Рассмотрим ориентированный граф, в котором учёные — вершины, а письма-рёбра ориентированы по направлению от отправителя к получателю. Тогда сумма исходящих степеней чётна как сумма чётных чисел, а сумма входящих степеней $57 = 19 \cdot 3$ — нечётна. Получаем противоречие с ориентированной леммой о рукопожатиях, поэтому каждый учёный не мог получить по 3 письма.

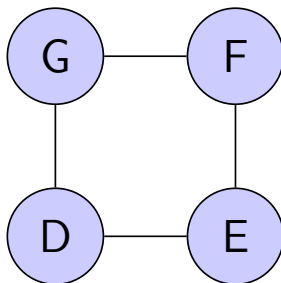
Лемма о хоровах

Лемма

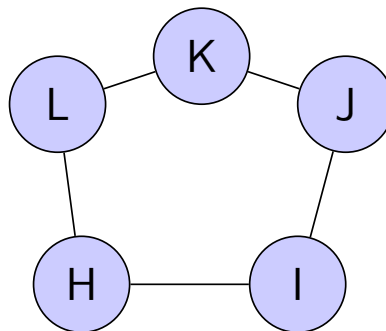
Если в графе у всех вершин степень 2, то он представляет из себя один или несколько непересекающихся по вершинам циклов.



Цикл длины 3



Цикл длины 4



Цикл длины 5

Задача 12

Условие: В классе 19 человек. У каждого по 2 друга (дружба взаимна). Докажите, что класс нельзя разбить на две команды так, чтобы любые два друга были в разных командах.

Задача 12

Решение: Рассмотрим граф, в котором дети — вершины, дружбы — рёбра. Заметим, что у каждой вершины степень 2, поэтому граф представляет из себя один или несколько непересекающихся по вершинам циклов. Поскольку сумма длин циклов 19 (нечётное число), то среди циклов найдётся цикл нечётной длины. Подобный цикл не получится разбить на две команды так, чтобы любые два друга были в разных командах. Таким образом, и весь класс не получится разбить на две команды требуемы образом.