

Чётность

Напоминание

Чтобы из числа вычесть сумму двух чисел, можно из этого числа по очереди вычесть каждое слагаемое.

$$A - (B + C) = A - B - C$$

Распределительное свойство умножения относительно сложения.

Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Распределительное свойство умножения относительно вычитания.

$$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$$

Чётные и нечётные числа

Чётным называется целое число, которое делится на 2.

$$A : 2 = B \quad \Leftrightarrow \quad A = 2 \cdot B$$

Нечётным называется целое число, которое не делится на 2.

$$C : 2 = D \text{ (ост. 1)} \quad \Leftrightarrow \quad C = 2 \cdot D + 1$$

Нечётное число на 1 больше некоторого чётного.

$$C + 1 = 2 \cdot D + 2 = 2 \cdot D + 2 \cdot 1 = 2 \cdot (D + 1)$$

$$\dots, \quad 2 \cdot D, \quad 2 \cdot D + 1, \quad 2 \cdot (D + 1), \quad \dots$$

$$C = 2 \cdot (D + 1) - 1 = 2 \cdot X - 1$$

Нечётное число на 1 меньше некоторого чётного.

Чётность суммы и разности чисел

$$\text{Ч} + \text{Ч} = ?, \quad \text{Ч} - \text{Ч} = ?,$$

$$\text{Н} + \text{Ч} = ?, \quad \text{Н} - \text{Ч} = ?,$$

$$\text{Ч} + \text{Н} = ?, \quad \text{Ч} - \text{Н} = ?,$$

$$\text{Н} + \text{Н} = ?, \quad \text{Н} - \text{Н} = ?.$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} = 2 \cdot B + 2 \cdot E = 2 \cdot (B + E) = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} - \text{Ч} = 2 \cdot B - 2 \cdot E = 2 \cdot (B - E) = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Ч} = 2 \cdot C + 1 + 2 \cdot B = 2 \cdot C + 2 \cdot B + 1 = 2 \cdot (C + B) + 1 = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} = \text{Н} + \text{Ч},$$

$$\text{Н} - \text{Ч} = 2 \cdot C + 1 - 2 \cdot B = 2 \cdot C - 2 \cdot B + 1 = 2 \cdot (C - B) + 1 = \text{Н},$$

$$\text{Ч} - \text{Н} = 2 \cdot B - (2 \cdot C + 1) = 2 \cdot B - 2 \cdot C - 1 = 2 \cdot (B - C) - 1 = \text{Н},$$

$$\text{Н} + \text{Н} = 2 \cdot C + 1 + 2 \cdot F + 1 = 2 \cdot (C + F) + 2 = 2 \cdot (C + F + 1) = \text{Ч}.$$

$$\text{Н} - \text{Н} = 2 \cdot C + 1 - (2 \cdot F + 1) = 2 \cdot C + 1 - 2 \cdot F - 1 = 2 \cdot C - 2 \cdot F = 2 \cdot (C - F) = \text{Ч}.$$

Чётность суммы и разности чисел

$$\text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч}, \quad \text{Ч} - \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Ч} = \text{Н}, \quad \text{Н} - \text{Ч} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}, \quad \text{Ч} - \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Н} + \text{Н} = \text{Ч}, \quad \text{Н} - \text{Н} = \text{Ч}.$$

Будем говорить, что *два числа имеют разную чётность*, если одно из них чётно, а другое нечётно. Иначе будем говорить, что *два числа имеют одинаковую чётность*.

Свойства:

- Сумма двух чисел разной чётности нечётна.
- Сумма двух чисел одной чётности чётна.
- Разность двух чисел и сумма тех же чисел одной чётности.

Задача 1

У Пети есть четыре палочки длины 1 см, две палочки длины 2 см, семь палочек длины 3 см и пять палочек длины 4 см. Он хочет сложить из них прямоугольник используя все палочки. Удастся ли ему это? (Ломать палочки нельзя.)

Решение:

Периметр прямоугольника равен $P = 2(a + b)$, где a — длина прямоугольника, а b — его ширина.

Число $P = 2(a + b)$ чётное.

Посчитаем сумму длин всех палочек

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 49.$$

49 — нечётное, а периметр прямоугольника чётный.

Задача 2

Сумма трёх чисел нечётна. Сколько может быть нечётных слагаемых?

Решение:

Рассмотрим какие могут быть варианты:

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} = ?,$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Н} = ?,$$

$$\text{Ч} + \text{Н} + \text{Н} = ?,$$

$$\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = ?.$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} = (\text{Ч} + \text{Ч}) + \text{Ч} = \text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Н} = (\text{Ч} + \text{Ч}) + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} + \text{Н} = (\text{Ч} + \text{Н}) + \text{Н} = \text{Н} + \text{Н} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = (\text{Н} + \text{Н}) + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Задача 2

Сумма трёх чисел нечётна. Сколько может быть нечётных слагаемых?

Решение:

Рассмотрим какие могут быть варианты:

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} + \text{Н} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Нам подходят второй и четвёртый варианты, значит, может быть одно или три нечётных слагаемых.

Чётность суммы нескольких слагаемых

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = (\text{Ч} + \text{Ч}) + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = \text{Ч} + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = \dots = \text{Ч}.$$

$$\underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н} + \text{Н}}_{\text{чётное количество}} = (\text{Н} + \text{Н}) + (\text{Н} + \text{Н}) + \dots + (\text{Н} + \text{Н}) = \text{Ч} + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = \dots = \text{Ч}.$$

$$\underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н}}_{\text{нечётное количество}} = \underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н}}_{\text{чётное количество}} + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

$$\text{Ч} + \dots + \text{Ч} + \underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н}}_{\text{нечётное количество}} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

$$\text{Ч} + \dots + \text{Ч} + \underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н}}_{\text{чётное количество}} = \text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч}.$$

Свойства:

- Сумма любого количества чётных чисел чётна.
- Сумма чётного количества нечётных чисел чётна.
- Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна.
- Чётность суммы зависит только количества нечётных слагаемых в ней.

Задача 2

Сумма трёх чисел нечётна. Сколько может быть нечётных слагаемых?

Решение:

Поскольку сумма нечётна, то количество нечётных слагаемых в этой сумме нечётно.

Следовательно, может быть одно или три нечётных слагаемых.

Чётность произведения

$$\mathbb{C} \cdot \mathbb{C} = ?,$$

$$\mathbb{C} \cdot \mathbb{H} = ?,$$

$$\mathbb{H} \cdot \mathbb{C} = ?,$$

$$\mathbb{H} \cdot \mathbb{H} = ?.$$

$$\mathbb{C} \cdot X = 2 \cdot B \cdot X = 2 \cdot B \cdot X = \mathbb{C},$$

$$\mathbb{H} \cdot \mathbb{H} = \mathbb{H} \cdot (2 \cdot C + 1) = \mathbb{H} \cdot 2 \cdot C + \mathbb{H} = 2 \cdot \mathbb{H} \cdot C + \mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{H} = \mathbb{H}.$$

Чётность произведения

$$\text{Ч} \cdot \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} \cdot \text{Н} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} \cdot \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Н}.$$

Свойства:

- Произведение чётного числа на любое целое число чётно.
- Произведение двух нечётных чисел нечётно.

Задача 3

Сумма двух чисел нечётна. Каким — чётным или нечётным — будет их произведение?

Решение:

$$A + B = \text{Н},$$

$$A \cdot B = ?$$

Первый способ.

Числа A и B разной чётности, значит одно из них чётное. Поэтому произведение чётно.

Второй способ.

Произведение не может оказаться нечётным, так как тогда бы оба числа A и B были бы нечётными. Но сумма двух нечётных чисел не может оказаться чётной.

Чётность произведения нескольких чисел

$$Н \cdot Н \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = (Н \cdot Н) \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = Н \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = \dots = Н.$$

$$Ч \cdot Ч \cdot \dots \cdot Ч \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = Ч \cdot \underbrace{(Ч \cdot \dots \cdot Ч \cdot Н \cdot \dots \cdot Н)}_{\text{обозначим за } X} = Ч \cdot X = Ч.$$

Свойства:

- Произведение любого количества нечётных чисел нечётно.
- Произведение любого количества чисел, среди которых есть хотя бы одно чётное, чётно.

Задача 4

Сумма трёх чисел чётна. Каким — чётным или нечётным — будет их произведение?

Решение:

$$A + B + C = \text{Ч},$$

$$A \cdot B \cdot C = ?$$

Первый способ.

Поскольку сумма чётна, то среди слагаемых есть чётное число.

Значит, произведение чётно.

Второй способ.

Чтобы произведение было нечётно, все множители должны быть нечётными.

Но тогда сумма трёх нечётных чисел будет нечётной.

Задача 5

Сумму двух натуральных чисел умножили на их произведение. Докажите, что получилось чётное число.

Решение:

$$(A + B) \cdot AB$$

Первый способ. Если одно из чисел A или B чётно, то произведение чётно.

Если оба числа нечётны, то их сумма чётна, поэтому произведение снова чётно.

Второй способ.

Если произведение $(A + B) \cdot AB$ оказалось бы нечётным, то оба числа $A + B$ и AB должны быть нечётными.

Но AB нечётно, когда оба числа A и B нечётны, а $A + B$ нечётно, когда числа A и B разной чётности.

Задача 6

Можно ли найти (a) три, (b) четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечётными числами?

Решение:

Если произведение нечётно, то все множители нечётны.

А чтобы сумма нечётных чисел была нечётна надо чтобы их было нечётное количество.

Поэтому (a) да, например 1, 3, 5, (b) нет.

Задача 7

Семнадцать учеников купили в буфете по два пирожка: с картошкой и с яблоком. Некоторые из них не любят пирожки с картошкой, а остальные не любят пирошки с яблоком. Могут ли они обменяться друг с другом пирожками, чтобы у каждого было по два пирожка с одной начинкой?

Решение:

Всего 17 пирожков с яблоком (как и с картошкой). Но 17 — нечётное число...

Задача 8

В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Решение:

Всего депутатов чётное количество.

Первый способ.

Значит, количество голосов «за» и «против» одной чётности.

Но тогда их разность чётна.

Но 23 — нечётное число.

Второй способ.

Обозначим количество голосов «против» за x , тогда количество голосов «за» равно $x + 23$.

Тогда их сумма

$$x + x + 23 = 2x + 23 = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Но их сумма равна количеству депутатов.

Задача 9

Не вычисляя суммы $1 + 2 + 3 + \dots + 2025$, определите её чётность.

Решение:

В сумме 1012 чётных слагаемых и 1013 нечётных слагаемых. Поэтому сумма нечётна.

Задача 10

Кузнечик прыгает по прямой, каждым прыжком на 1 см. Через несколько прыжков кузнечик оказался там, где начинал. Докажите, что он сделал чётное количество прыжков.

Решение:

Первый способ.

Количество прыжков в одну сторону равно количеству прыжков обрано, значит, их сумма чётна.

Второй способ.

При прыжке на числовой прямой кузнечик прибавляет к своей координате 1, если прыгает вправо, и вычитает из своей координаты 1, если прыгает влево.

Поэтому прыжки кузнечика записываются в виде выражения:

$$+1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + \dots = 0$$

По условию эта сумма равна 0.

Поскольку сумма и разность чисел одной чётности, то число

$$+1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \quad \text{чётно.}$$

Но это число равно количеству прыжков кузнечика.

Задача 11

Никита купил тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Сергей вырвал из этой тетради 30 листов и сложил все 60 чисел, которые написаны на них. Могло ли у него получиться число 2025?

Решение:

На каждом листе две страницы, на которых написано два последовательных числа, одно из них чётное, а другое нечётно.

Значит, сумма этих чисел на листе нечётна.

Всего 30 листов, значит сумма 30 нечётных чисел чётна.

Но 2025 — нечётно.

Задача 12

(а) Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр — достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

(б*) Можно ли разменять 50 рублей при помощи десяти купюр — достоинством в 2, 6 и 10 рублей?

Решение:

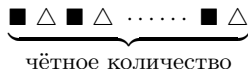
(а) Числа 1, 3 и 5 нечётны, сумма 10 нечётных чисел чётна. Но 25 — нечётно.

(б) Заметим, что все числа увеличились ровно в два раза ...

Чётность и чередование

Идея 1. Если в ряд лежат предметы двух видов чередуясь, то

- первый и последний предметы разного вида, если всего предметов чётное количество;



- первый и последний предметы одного вида, если всего предметов нечётное количество.



Задача 13

Вдоль забора растут восемь кустов малины.

Число ягод на соседних кустах отличается на единицу.

Может ли на всех кустах быть вместе 2025 ягод?

Решение:

Всего кустов чётное количество.

Значит, там 4 куста с чётным количеством ягод и 4 куста с нечётным количеством ягод.

Но тогда сумма всех ягод чётна, а 2025 — нечётное число.

Задача 14

Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 2025 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение:

Каждый нечётный прыжок кролик делал на камень.

Значит, после 2025 прыжка он окажется снова на камне.

Чётность и чередование

Идея 2. Если в задаче присутствует *процесс* и некоторая величина, которая принимает ровно два значения (например Ч и Н), и на каждом шаге этого *процесса* величина поочерёдно принимает эти значения, то

- на каждом чётном шаге этого процесса величина принимает то же значение, что и в начале,
- на каждом нечётном шаге этого процесса величина принимает противоположное значение тому, которое было в начале.

(Н) Ч Н Ч Н Ч Н

Задача 15

В сундуке лежит 20 колпаков. 17 гномов по очереди подходят к сундуку, и каждый либо снимает свой колпак и кладёт в сундук, либо берёт из сундука один колпак. Могло ли после ухода всех гномов в сундуке остаться ровно 10 колпаков?

Решение:

Изначально колпаков чётно в сундуке.

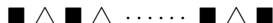
После каждого гнома чётность колпаков меняется.

Значит, после 17 гномов она будет противоположной от начальной.

Чётность и чередование

Идея 3.

- Нечётное количество предметов двух видов нельзя расположить по кругу так, чтобы они чередовались. (Если попробуем их так расположить по кругу, то первый и последний предмет будут одного вида, и поэтому такой круг не замкнётся, см. рисунок ниже.)



- Если по кругу лежат предметы двух видов чередуясь, то этих предметов обязательно чётное количество и предметов обоих видов поровну.

Задача 16

В плоскости расположено 11 шестерёнок таким образом, что первая сцеплена со второй, вторая — с третьей, $\dots$, одиннадцатая — с первой. Могут ли они вращаться?



Решение:

Посмотрим на вращение шестеренок.

Соседние две вращаются в разные стороны.

Но их всего нечётное количество.

Задача 17

По кругу написано семь натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

Решение:

Числа бывают двух видов: чётные и нечётные.

Поскольку всего чисел нечётное количество, то чередоваться они не могут.

Значит, есть два соседних одной чётности, а их сумма чётна.

Чётность как инвариант

В каждой задаче в каком-либо виде присутствует *процесс*.

Если на каждом шаге этого *процесса* к некоторой *величине* прибавляется или вычитается чётное число, то *чётность* этой величины *не меняется*.

Такая величина называется ***инвариантом***.

В задачах нужно найти такую *величину* и понять почему у неё *не меняется чётность*.

Часто в задачах такой величиной может быть *количество* каких-либо объектов или *сумма* каких-то чисел.

Задача 18

На столе стоят шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором — две, в третьем — три, $\dots$, в шестом — шесть. Разрешается на любые два столбика положить по монете. Может ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми?

Решение:

Первый способ.

Посмотрим на сумму всех монет.

Чётность суммы монет в этой задаче будет *инвариантом*.

В начале чётное количество монет и на каждом шаге их количество увеличивается на 2, то есть остаётся чётным.

Задача 18

На столе стоят шесть столбиков монет. В первом столбике одна монета, во втором — две, в третьем — три, ..., в шестом — шесть. Разрешается на любые два столбика положить по монете. Может ли за несколько таких операций сделать все столбики одинаковыми?

Решение:

Второй способ.

Посмотрим на количество столбиков с нечётным количеством монет.

Чётность количества этих столбиков будет *инвариантом*.

За один ход мы кладем монеты в 2 столбика.

Значит, меняем в них чётность.

Возможны такие случаи:

$(Ч, Ч) \rightarrow (Н, Н)$ — количество нечётных столбиков увеличилось на 2,

$(Н, Н) \rightarrow (Ч, Ч)$ — количество нечётных столбиков уменьшилось на 2,

$(Ч, Н) \rightarrow (Н, Ч)$ — количество нечётных столбиков не изменилось.

Задача 19

Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки — пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

Решение:

Первый способ.

Чётность количества монет у Пети — *инвариант*.

Второй способ.

Количество двушек и гривенников всегда разной чётности.

Задача 20

На столе лежат 36 карт, из них 25 карт лежат рубашкой вверх, а остальные — рубашкой вниз. За одну операцию разрешается перевернуть

- (а) любые две карты,
- (б) любые три карты,
- (с) любые четыре карты.

Можно ли, повторяя эту операцию, перевернуть все карты рубашкой вниз?

Решение:

(а) *Инвариант* — чётность количества, лежащих рубашкой вверх.

Обозначим карты: 1 — рубашкой вверх, 0 — рубашкой вниз.

$(0, 0) \rightarrow (1, 1)$ — количество карт, лежащих рубашкой вверх, увеличилось на 2,

$(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, уменьшилось на 2,

$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, не изменилось.

Задача 20

На столе лежат 36 карт, из них 25 карт лежат рубашкой вверх, а остальные — рубашкой вниз. За одну операцию разрешается перевернуть

- (а) любые две карты,
- (б) любые три карты,
- (с) любые четыре карты.

Можно ли, повторяя эту операцию, перевернуть все карты рубашкой вниз?

Решение:

(б) Обозначим карты: 1 — рубашкой вверх, 0 — рубашкой вниз.

$(0, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, увеличилось на 3,

$(0, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, увеличилось на 1,

$(0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, уменьшилось на 1,

$(1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, уменьшилось на 3.

Поэтому можно, например 25 раз сделать операцию, которая уменьшает количество, лежащих рубашкой вверх, на 1.

Или можно сделать эту операцию 1 раз, а затем 8 раз сделать операцию, которая уменьшает количество, лежащих рубашкой вверх, на 3.

Задача 20

На столе лежат 36 карт, из них 25 карт лежат рубашкой вверх, а остальные — рубашкой вниз. За одну операцию разрешается перевернуть

- (а) любые две карты,
- (б) любые три карты,
- (с) любые четыре карты.

Можно ли, повторяя эту операцию, перевернуть все карты рубашкой вниз?

Решение:

(с) **Инвариант** — чётность количества, лежащих рубашкой вверх.

Обозначим карты: 1 — рубашкой вверх, 0 — рубашкой вниз

$(0, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 1)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, увеличилось на 4,

$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, увеличилось на 2,

$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, не изменилось,

$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, уменьшилось на 2,

$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$ — количество, лежащих рубашкой вверх, уменьшилось на 4.