

Программа зачёта

Конструктивы с числами

1. Найдите шестизначное число, у которого
- первая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё;
 - вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё.

2. В сумме

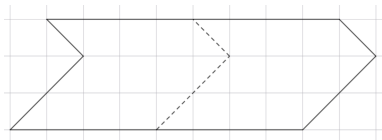
$$П,Я + Т,Б + Д,Р + О,Б + Е,Й$$

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых *не целые*, но сама сумма является *целым* числом.

1. Каким именно может быть это целое число?
 2. Для каждого возможного ответа напишите один пример таких пяти слагаемых.
 3. Объясните, почему другие суммы получить нельзя.
3. Докажите, что для любого n найдётся убывающая арифметическая прогрессия из n членов вида $\frac{1}{k}$.

Периметры, площади и разрезания

4. На кружке дали групповое задание: разрезать фигуру на равные части. От каждой группы нужно было хотя бы по два способа. Ваш напарник Петя придумал один способ (см. рисунок). Придумайте другой, отличный от этого.



5. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.

30		?
21	35	
	10	8

6. Квадрат разбили на три прямоугольника как показано на рисунке. Их периметры равны 8, 10, 12 см. Найдите периметр квадрата.

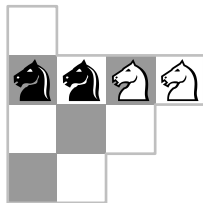
10	
8	12

Задачи про клеточки

7. Профессор Дирихле хочет посадить 37 кроликов в клетки квадрата 4×4 так, чтобы в любом уголке из трех клеток было, по крайней мере, 7 кроликов. Получится ли у него это сделать?
8. Аня разбила клетчатый квадрат 6×6 на уголки из трех клеток, прямоугольники 1×3 и квадраты 2×2 . Всего у нее получилось 11 фигур.
 - а) Сколько среди них квадратов 2×2 ?
 - б) Таня возле каждой из 49 вершин клеток подписала, сколько фигур её содержат (фигура содержит точку, если точка лежит на её границе или внутри). Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?
9. Из клетчатой доски 20×20 вырезали 48 прямоугольников из трех клеток. Докажите, что можно вырезать еще хотя бы один.

Знакомство с графами

10. Докажите, что в любом графе (у которого не менее двух вершин) найдутся две вершины одинаковой степени.
11. Можно ли придумать такую доску, что из некоторых её клеток конь может обойти все её клетки ровно по одному разу и вернуться назад, из других — может обойти все её клетки ровно по одному разу, но вернуться назад не сможет, а из третьих — не сможет даже просто обойти все клетки доски ровно по одному разу. А только клетки последних двух типов?
12. На куске шахматной доски расположены два белых и два черных коня. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов белые и чёрные кони поменяться местами?



Графы 2

13. В связном графе степени четырёх вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.
14. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
15. Сформулируйте и докажите **теорему о максимальном количестве рёбер в двудольном графе** с $2n$ вершинами; $2n + 1$ вершинами.

Комбинаторика

16. Сколько среди девятизначных чисел, все цифры которых различны, таких, которые делятся на 3?
17. Найдите количество раскрасок клеток квадрата 3×3 в 5 цветов, при которых во всех строках, столбцах и двух главных диагоналях цвета клеток не повторяются (квадрат фиксирован, не поворачивается и не переворачивается).
18. Найдите количество способов расставить 8 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей.

Комбинаторика 2

19. В турнире по карточной игре «Дурак» принимали участие 9 человек. В каждой партии играли 3 человека, при этом каждый человек сыграл с каждой парой других людей ровно по 1 разу. Сколько всего партий было в турнире?
20. Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ двумя способами:
А) алгебраически и Б) комбинаторно.
21. В полном графе на 11 вершинах стерли 18 ребер. Докажите, что в нём найдется, по крайней мере, 3 «треугольника» (возможно, с пересекающимися вершинами).

Мудрецы

22. Король решил проверить, сколь мудры два главных его мудреца. Он позвал их к себе и сказал: «Завтра утром я поставлю вас друг против друга, и каждому на голову надену либо белый, либо чёрный колпак. Потом вас отведут в разные комнаты, и каждый скажет цвет своего колпака. Если никто не угадает цвет своего колпака, вас обоих казнят. Иначе — обоих наградят». Как мудрецам договориться действовать так, чтобы выжить?
23. Двум мудрецам сообщили по ненулевой цифре. Они знают только, что цифры отличаются. Мудрецы встретились и по очереди сделали следующие утверждения (см. ниже). Какую цифру сообщили второму мудрецу?

Первый: Я не знаю, чье число больше.

Второй: И я не знаю, чье число больше.

Первый: Я по-прежнему не знаю, чье число больше.

Второй: И я всё ещё не знаю, чье число больше.

24. Десять мудрецов выстроили в колонну по одному и надели каждому красный, синий или зеленый колпак. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Они должны по очереди (начиная с последнего) попытаться угадать цвет своего колпака. Говорить можно только «красный», «синий» или «зеленый». Как мудрецам договориться действовать таким образом, чтобы ошибся максимум один из них?

Математические игры

25. На столе лежат 13 мандаринок по кругу. За ход разрешается съесть один или два лежащих рядом мандаринки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
26. На столе доньшками вниз стоит 2026 пустых стаканов. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть один стакан, за второй — один или два стакана, за третий — один, два или три стакана, и так далее. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы будут расположены доньшками вверх.
27. Дана шоколадка 700×2026 (700 – высота, 2026 – ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше или равна ширины, а второму — меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выигрывает при правильной игре?

Математические игры 2

28. На столе лежат две коробки конфет: в каждой коробке по 11 конфет. Каждый игрок своим ходом может съесть две конфеты из одной коробки и одну конфету из другой коробки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
29. На шахматной доске стоит конь. Двое по очереди ходят им, при этом запрещается ставить его на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.
30. На столе лежит 100 конфет. Два игрока по очереди берут конфеты со стола и съедают их, по следующим правилам: за первый ход можно съесть только одну конфету, за второй — одну или две, за третий — одну, две или три, и так далее. Выигрывает тот, после хода которого все конфеты будут съедены.

Делимость

31. Нескольким зверюшкам раздали 210 долек апельсина. Выяснилось, что зайчику досталось меньше всех долек, и остальные зверюшки передали по одной своей дольке зайчику. После этого у всех зверей стало ровно по x долек. Найдите максимально и минимально возможное значение x .
32. В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким наибольшим и наименьшим может быть это число?
33. Существует ли решение у ребуса $ОСЫ \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = **000000$?
(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые, а звёздочками — любые.)

Вокруг суммы цифр

34. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно.
35. Докажите, что нельзя подобрать такие два натуральных числа X и Y , что Y получается из X перестановкой цифр и $X + Y = \underbrace{99 \dots 9}_{2025}$.
36. Обозначим за $S(N)$ сумму цифр числа N . Докажите, что:

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \dots - S(7^{100} - 1) + S(7^{100}) = \frac{7^{100} + 1}{2}.$$

Алиquotные дроби

37. Вычислите сумму
- $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$
38. В клубе перфекционистов 20 человек. На праздник они заказали 20 тортов, однако, один торт не довезли. Можно ли разрезать оставшиеся 19 тортов и раздать куски членам клуба таким образом, чтобы каждый получил одинаковый набор из трех кусков?
39. Сумма восьми алиquotных дробей равна 1. Может ли при этом одна из дробей быть меньше $\frac{1}{10^{24}}$?

Десятичная запись числа, признаки делимости

40. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.
41. На доске записано произвольное 2026-значное число, кратное 9. Обозначим через A сумму цифр этого числа. Обозначим через B сумму цифр числа A . Обозначим через C сумму цифр числа B . Найдите число C .
42. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?