

Делимость

Целыми числами мы будем называть натуральные числа и 0. (В дальнейшем к целым числам добавятся ещё и отрицательные числа).

Напоминание. Говорят, что *целое число a делится на целое число b* , если существует такое целое число c , что $a = bc$. Число c называется *частным от деления a на b* . Если целое число a делится на целое число b , то пишут $a : b$ (читается « a делится на b » или « a кратно b »).

Основные свойства делимости:

1. Любое целое число a делится само на себя.

$$a : a.$$

Доказательство.

Проверим по определению. Целое число a делится на целое число a , если существует такое целое число c , что $a = ac$. Такое c существует, это $c = 1$:

$$a = a \cdot 1.$$

2. 0 делится на любое целое число a .

$$0 : a.$$

Доказательство.

Поскольку $0 = a \cdot 0$, то при $c = 0$ будет верно $0 = ac$, а это по определению означает, что 0 делится на a .

3. Любое целое число a делится на 1.

$$a : 1.$$

Доказательство.

Так как можно записать $a = 1 \cdot a$, то это по определению означает, что a делится на 1.

4. Если $a : c$ и $b : c$, то $(a + b) : c$ и $(a - b) : c$.

Доказательство.

Поскольку $a : c$ и $b : c$, то существуют такие целые числа n и m , что $a = cn$ и $b = cm$. Тогда по распределительному свойству умножения относительно сложения

$$a + b = cn + cm = c(n + m).$$

А это означает, что $(a + b) : c$. Аналогично по распроделительному свойству умножения относительно вычитания

$$a - b = cn - cm = c(n - m).$$

А это означает, что $(a - b) : c$.

5. Если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$.

Доказательство.

Поскольку $a : b$ и $b : c$, то существуют такие целые числа n и m , что $a = bn$ и $b = cm$. Тогда

$$a = bn = (cm)n = c(mn).$$

А это означает, что $a : c$.

6. Если $a : b$, то $ka : b$ для любого целого k .

Доказательство.

Поскольку $a : b$, то существуют такое целое число n , что $a = bn$. Тогда

$$ka = kbn = b(kn).$$

А это означает, что $ka : b$.

7. Если $a : b$, то $ka : kb$ для любого целого k .

Доказательство.

Поскольку $a : b$, то существуют такое целое число n , что $a = bn$. Тогда

$$ka = kbn = (kb)n.$$

А это означает, что $ka : kb$.

8. Если $a : b$ и $c : d$, то $ac : bd$.

Доказательство.

Поскольку $a : b$ и $c : d$, то существуют такие целые числа n и m , что $a = bn$ и $c = dm$. Тогда

$$ac = bndm = bd(nm).$$

А это означает, что $ac : bd$.

Простые и составные числа

Определение. *Простое число* — это натуральное число, больше единицы, имеющее ровно два натуральных делителя: 1 и само себя.

Определение. *Составное число* — это натуральное число, большее единицы, которое не является простым. Другими словами, составное число — это такое натуральное число, которое делится нацело более чем на два натуральных числа.

Вернёмся к свойству делимости: *Если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$.* Оно означает, что если число a делится на число b , то число a делится на любой простой делитель числа b . А значит, чтобы выяснить является ли число a простым, не нужно проверять делится ли оно на составные числа. Остаётся проверить делится ли число a на простые числа. А на какие простые числа нужно проверять делимость? Понятно, что число a точно не может делиться на числа, большие a . Поэтому можно не проверять делимость на простые числа, большие a . Можно ли ещё уменьшить диапазон проверки? Можно. Понятно, что чётное число, большее 2, не простое. А для нечётного числа a понятно, что оно не разделится на простое число, большее $(a + 1) : 2$, потому что в результате деления неполное частное будет больше 1 и меньше 2. Но можно ещё уменьшать диапазон проверки. Давайте посмотрим на примере следующей задачи

Задача 1

(а) Известно, что число A делится на 1, на 5 и на само себя. Является ли оно составным? Ответ объясните.

(б) Известно, что число B делится на 1, на 6 и на само себя. Является ли оно составным? Ответ объясните.

Решение.

(а) Необязательно. Например, если $A = 5$, то оно делится на 1, на 5 и на само себя (снова на 5), но оно простое.

(б) Да. По свойству 5, которое мы доказали выше число B делится ещё на 2 и на 3. В самом деле, $B : 6$ и $6 : 2$, поэтому $B : 2$. Аналогично, $B : 3$. Но тогда число B имеет уже четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Поэтому оно является составным.

Задача 2

Разность двух простых чисел равна 17. Найдите эти числа.

Решение.

Поскольку разность нечётная, то одно из двух чисел чётное, а другое нечётное. Но есть только одно чётное простое число — это 2. Значит, другое простое число — это 19.

Задача 3

Является ли простым число (с) 401; (d) 323? Ответ объясните.

Решение.

(а) Проверим, что $401 \not\div 2$ и $401 \not\div 3$. Как мы заметили выше, можно не проверять, что $401 \not\div 4$. В самом деле, предположим противное, пусть $401 : 4$, то так как $4 : 2$, то по свойству делимости $401 \not\div 2$, противоречие. Аналогично 401 не будет делиться на любое чётное число и на любое число, кратное 3.

Проверим, что $401 \not\div 5$, $401 \not\div 7$, $401 \not\div 11$, $401 \not\div 13$, $401 \not\div 17$, $401 \not\div 19$, $401 \not\div 23$.

На сколько простых чисел нужно ещё проверять делимость числа 401? Как мы заметили выше, 401 точно не разделится на простое число, большее 401. Но и на число, большее 201, оно точно не разделится, так как в результате деления неполное частное будет больше 1 и меньше 2.

А может ли при деления числа 401 на какое-то целое число b в частном получить-ся 3. Предположим, что может, тогда по определению делимости $401 = b \cdot 3 = 3 \cdot b$, а это означает, что $401 : 3$, противоречие. Аналогично в частном не может получиться никакое из чисел 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, так как мы проверили, что число на них уже не делится.

Предположим, что 401 делится на какое-то целое число b , тогда по определению делимости $401 = bc$. Но мы проверили, что в таком случае должно быть $b > 23$ и $c > 23$, а тогда $401 = bc > 23 \cdot 23 = 529$, противоречие. Таким образом, получилось, что число 401 является простым.

(b) Как и в предыдущем пункте, будем делить число 323 на простые числа. Сразу сообразим, что если 323 делится на какое-то целое число b , то по определению делимости $323 = bc$. Если $b > 18$ и $c > 18$, то $323 = bc > 18 \cdot 18 = 324$, противоречие. Поэтому если число 323 составное, то у него есть простой множитель, меньший 18.

Проверяем делимость числа 323 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17:

$323 \not\div 2$, $323 \not\div 3$, $323 \not\div 5$, $323 \not\div 7$, $323 \not\div 11$, $323 \not\div 13$,

$323 : 17 = 19$ — значит, 323 составное.

Решето Эратосфена

Число 2 простое (выделим его), а все остальные чётные числа составные (вычеркнем их).

Также поступим с 3, 5, 7, они простые (выделим их), а все остальные числа, кратные 3, 5, 7, составные (вычеркнем их).

Следующее невычеркнутое число всегда будет простым, ведь если бы оно имело простой множитель, то было бы вычеркнуто раньше.

Так получаем таблицу простых чисел до 100. Аналогично можно получить таблицу простых чисел до 1000. Такой процесс называется решето Эратосфена.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Основная теорема арифметики

Вы уже хорошо знаете, что среди натуральных чисел есть *простые* и *составные*. *Простое число* — это натуральное число, больше единицы, имеющее ровно два натуральных делителя: 1 и само себя. Число является *составным*, если оно равно произведению меньших натуральных (например, $6 = 2 \cdot 3$). Единица не является ни простым, ни составным.

Простые числа являются своего рода «кирпичиками», из которых можно построить все остальные числа. В каком же смысле? Рассмотрим число 420. Оно, без сомнения, составное. Его можно разложить на множители, например так: $420 = 42 \cdot 10$. Каждое из чисел 42 и 10 также составное: $42 = 6 \cdot 7$, $10 = 2 \cdot 5$. Поскольку $6 = 2 \cdot 3$, то $420 = 42 \cdot 10 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Мы получили *разложение* нашего числа на *простые сомножители*.

Наверное, ни у кого не вызывает сомнения, что, действуя таким же образом, можно представить в виде произведения простых чисел любое натуральное число (кроме 1) — надо раскладывать получающиеся сомножители в произведение меньших, пока это удастся. А что, если попробовать разложить число 420 на множители по-другому? Например, начав так: $420 = 15 \cdot 28$. Вы, конечно, догадались, что в результате получится то же самое разложение (если в конце простые сомножители расположить в порядке возрастания).

Этот интуитивно очевидный, но совсем не просто доказываемый факт называется **основной теоремой арифметики** и формулируется так: *каждое натуральное число за исключением единицы, раскладывается в произведение простых сомножителей, причём единственным образом*.

Задача

Решите ребус: $AX \cdot UX = 2001$.

Решение.

Разложим число 2001 на простые множители: $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Поэтому число 2001 можно двумя способами представить в виде произведения двузначных чисел $2001 = 69 \cdot 29$ и $2001 = 23 \cdot 87$. Нам подходит только первый вариант.

Ответ. $X = 9$, $A = 6$, $U = 2$ или $X = 9$, $A = 2$, $U = 6$.