

Графы 2

28 марта 2026

Лемма о рукопожатиях. В любом графе количество вершин нечётной степени чётно.

Теорема о сумме степеней вершин. В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер (и следовательно, чётна).

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно покрасить в два цвета так, что никакие вершины одного цвета не были соединены ребром. Совокупность вершин одного цвета называется *долей*.

Удобно представлять такой граф следующим образом. Расположим все вершины одного цвета слева, а все вершины другого цвета — справа. Тогда каждое ребро будет соединять одну вершину слева с вершиной справа.

Теорема о количестве рёбер в двудольном графе. В любом двудольном графе количеству рёбер равно сумме степеней вершин в каждой доле.

Обсуждаются на семинаре

1. В государстве каждый город соединён авиалиниями ровно с пятью другими городами.
 - (а) Нарисуйте схему авиалиний для государства из 10 городов.
 - (б) Сколько авиалиний в государстве из 50 городов?
 - (с) Может ли существовать государство, в котором ровно 46 авиалиний?
2. В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?
3. В классе 20 человек. На праздник каждый мальчик подарил каждой девочке по цветку.
 - (а) Какое наибольшее количество цветков могло быть подарено?
 - (б) Тот же вопрос, если в классе 21 человек.
 - (с) Сформулируйте и докажите **теорему о максимальном количестве рёбер в двудольном графе** с $2n$ вершинами; $2n + 1$ вершинами.

Основные задачи

4. Любой из 102 учеников математического кружка знаком хотя бы с 68 другими. Докажите, что найдутся четыре человека, имеющие одинаковое число знакомых.
5. В связном графе степени четырёх вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

6. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2026×2026 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
7. В математическом лагере у каждого участника есть 22 друга (дружба взаимна). При этом, если какие-то два участника дружат, то общих друзей у них нет, а если не дружат то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в математическом лагере?
8. В кружок записались 15 мальчиков и 15 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с тремя девочками. Докажите, что можно выбрать шестерых мальчиков и двух девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

Письменные задачи

9. В графе каждая вершина — синяя или красная. При этом каждая вершина соединена с 5 синими и 5 красными. Докажите, что количество вершин делится на 4.
10. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?