

## Раскраски 2

29 ноября 2025

1. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

2. Какое наибольшее количество прямоугольников  $1 \times 4$  можно вырезать из доски размером  $6 \times 6$ ? (Разрезы проходят по границам клеток.)

*Придумайте решение этой задачи, не используя диагональную раскраску.*

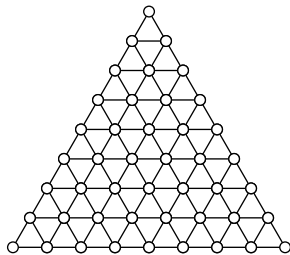
3. Из листа клетчатой бумаги размером  $29 \times 29$  клеточек вырезали 99 квадратов  $2 \times 2$  (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

4. **(Письменно)** Докажите, что доску размером  $10 \times 10$  нельзя разрезать на прямоугольники  $1 \times 4$ .

*Придумайте два решения этой задачи, не используя диагональную раскраску.*

5. Некоторую прямоугольную доску разрезали на квадраты  $2 \times 2$  и прямоугольники  $1 \times 4$ . Можно ли такую же доску разрезать на квадраты  $2 \times 2$  и прямоугольники  $1 \times 4$  другим способом, чтобы количество квадратов  $2 \times 2$  изменилось на 1?

6. **(Письменно)** Треугольник со стороной 8 разделили на треугольники со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество маленьких треугольников надо закрасить, чтобы все вершины маленьких треугольников (выделены на рисунке) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольника?



К задаче 6

7. В каждой клетке доски  $7 \times 7$  стоит белая или чёрная фишка. За один ход можно убрать с доски две фишки одного цвета, если они стоят в соседних по стороне или углу клетках. Какое наибольшее количество шашек можно гарантированно убрать с доски?

8. Дан куб  $4 \times 4 \times 4$ . Докажите, что три его грани, имеющие общую вершину, нельзя полностью оклеить 16 полосками  $1 \times 3$ .

9. Прямоугольник  $7 \times 7$  разрезали на квадраты  $1 \times 1$  и прямоугольники  $1 \times 3$ . Докажите, что плитка  $1 \times 1$  лежит в центре квадрата или примыкает к его границе.

*Придумайте решение этой задачи, не используя диагональную раскраску.*