

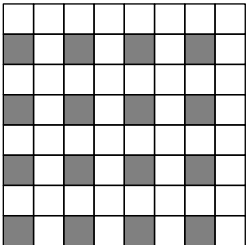
Раскраски 2

Раскраска окошками

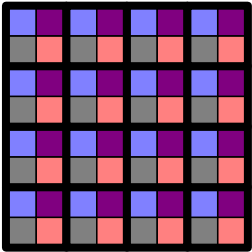
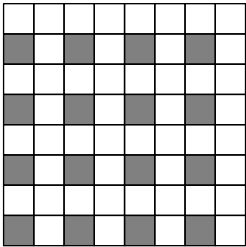
Задача 1

Можно ли некоторые клетки доски 8×8 закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

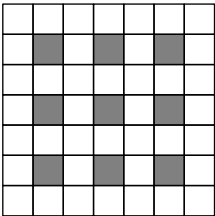
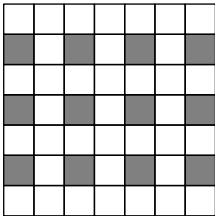
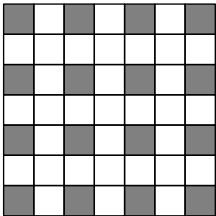
Решение.



Раскраска окошками и блоками



Раскраска окошками на доске 7×7

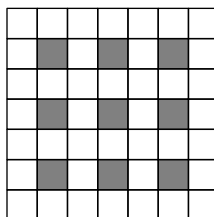


Задача 2

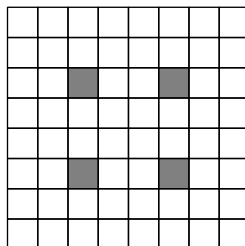
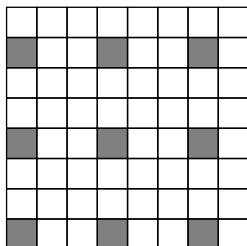
Можно ли из доски 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2 ?

Решение.

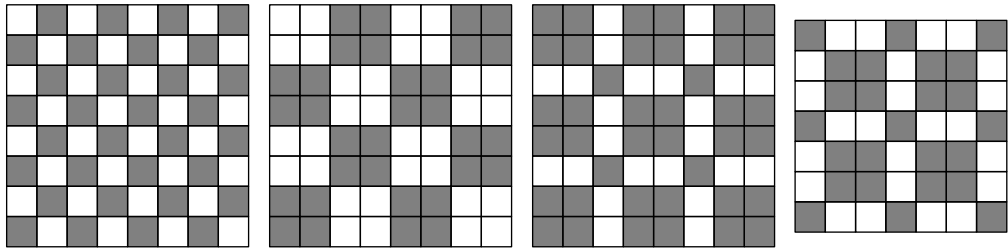
Раскрасим доску окошками как на рисунке. Получим 9 чёрных клеток. Каждый квадрат 2×2 содержит одну из этих клеток. Поэтому квадратов может быть не больше 9.



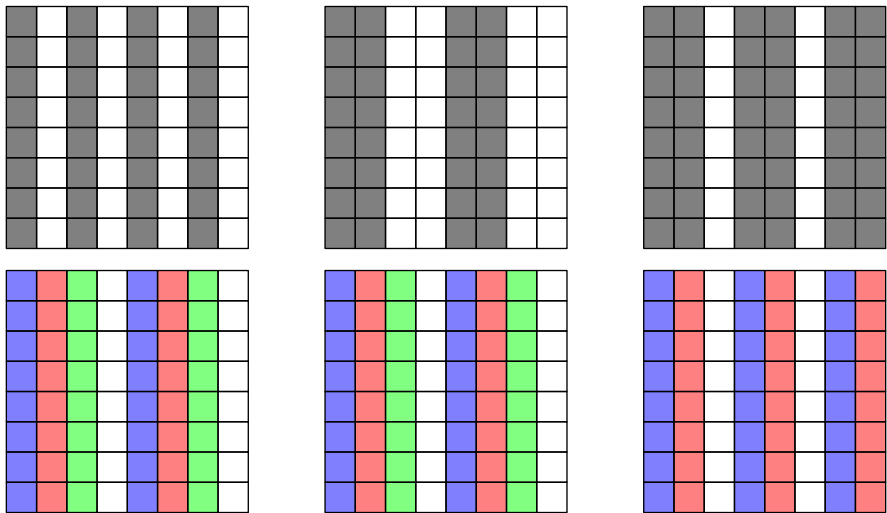
Ещё варианты раскраски окошками



Шахматная раскраска и её укрупнение



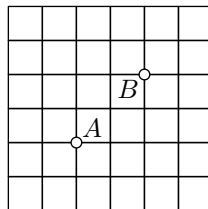
Укрупнения матрасной раскраски, являются частными случаями матрасной раскраски в несколько цветов



Укрупнения диагональной раскраски, также являются частными случаями диагональной раскраски в несколько цветов

Раскраски. Разбор

1. (Письменно) Турист находится в точке A и может ходить только по линиям сетки. Каждую минуту он переходит из одного пересечения линий в соседнее. Сможет ли он ровно через 33 минуты оказаться в точке B ?



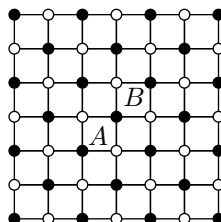
К задаче 2

Решение.

Раскрасим узлы в шахматном порядке.

При каждом ходе турист меняет цвет узла, в котором находится.

Происходит чередование цвета узлов при каждом ходе. Значит, оказаться в узле того же цвета, что и изначально, можно только через чётное количество ходов.



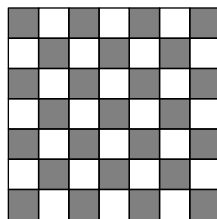
2. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук.

(а) По команде каждый жук переполз на одну из соседних по стороне клеток. Докажите, что при этом найдется хотя бы одна свободная клетка.

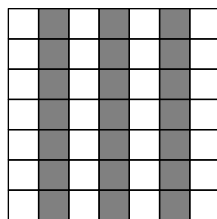
(б) (Письменно) По команде каждый жук переполз на одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что при этом найдется хотя бы 7 свободных клеток.

Решение.

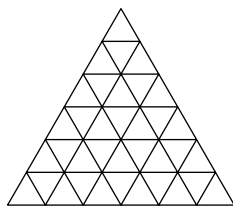
(а) Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 25, а белых 24. 24 жука с белых клеток переползут в 25 чёрных, поэтому хотя бы одна чёрная клетка останется свободной.



(б) Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 21, а белых 28. 21 жуков с белых клеток переползут в 28 чёрных, поэтому хотя бы 7 чёрных клеток останется свободными.



3. Замок в форме треугольника со стороной 6 разбит на 36 треугольных комнат со стороной 1 (см. рис.). В каждой стене, разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Какое наибольшее число комнат сможет обойти турист, не заходя ни в какую комнату дважды?



К задаче 3

Решение.

Раскрасим треугольники в шахматном порядке как на рисунке.

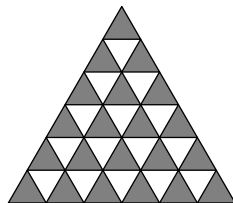
Тогда чёрных треугольников будет 21, а белых 15.

При переходе из одной треугольника (комнаты) в другой меняется его цвет, происходит чередование цвета клеток.

Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.

Значит, турист может обойти не более 15 белых и 16 чёрных комнат.

Пример несложно нарисовать, начав в верхнем треугольнике и спускаясь «змейкой» вниз.



4. (а) (Письменно) Из доски 7×7 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.
- (б) Из доски 11×11 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.

Решение.

(а) Раскрасим диагональной раскраской в три цвета как на рисунке. Получим 17 синих, 16 белых и 16 красных клеток.

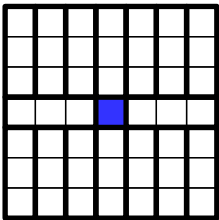
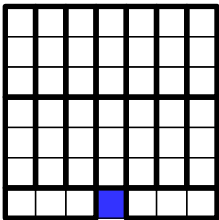
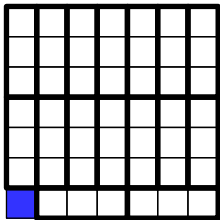
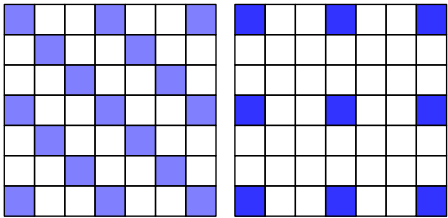
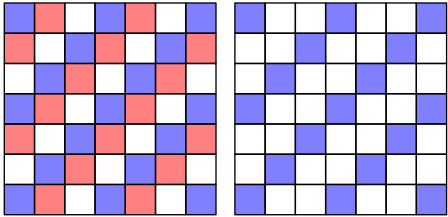
В каждом прямоугольнике 1×3 есть клетки всех трёх цветов.

Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну.

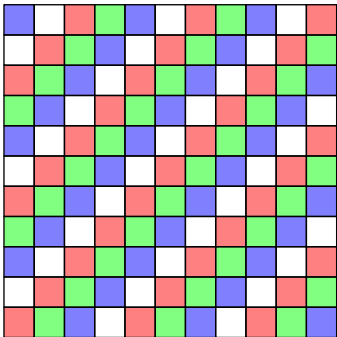
Значит, надо вырезать одну из синих клеток.

Если раскрасим диагональной раскраской в три цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию.

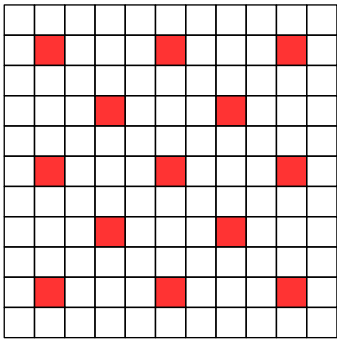
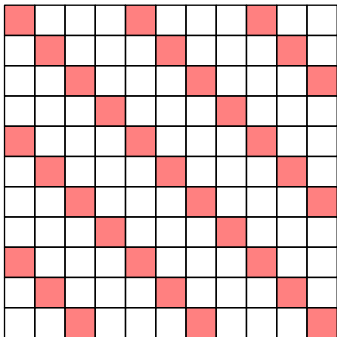
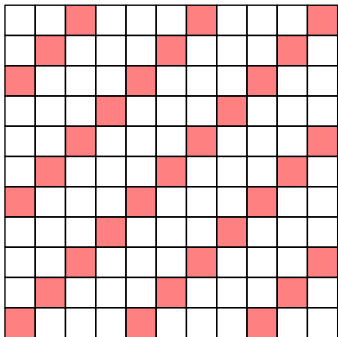
Надо вырезать одну из синих клеток. Примеры как можно вырезать ниже.



(б) Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета как на рисунке. Получим 30 зелёных, 30 синих, 30 белых и 31 красных клеток. В каждом прямоугольнике 1×4 есть клетки всех четырёх цветов. Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну. Значит, надо вырезать одну из красных клеток.



Если раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию. Надо вырезать одну из красных клеток.



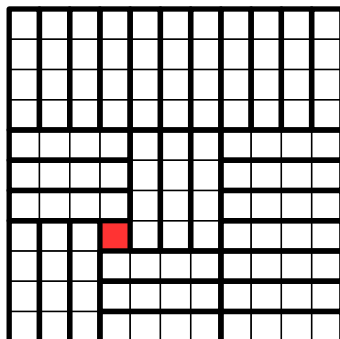
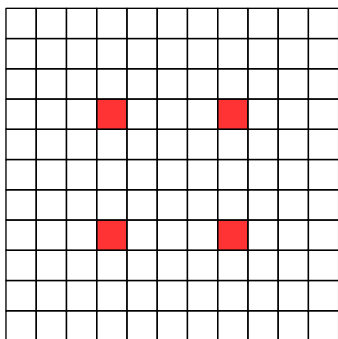
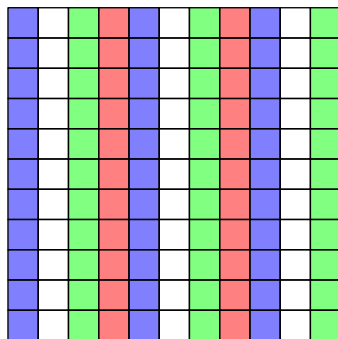
Раскрасим теперь матрасной раскраской в четыре цвета как на рисунке.

Получим 33 зелёных, 33 синих, 33 белых и 22 красных клеток.

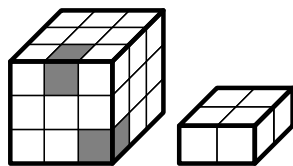
В каждом прямоугольнике 1×4 либо есть клетки всех четырёх цветов, либо все клетки одного цвета.

Поэтому, чтобы получилось разрезать, разность между количеством клеток двух разных цветов должна делиться на 4.

Значит, надо вырезать одну из красных клеток.



5. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, разделенный на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ (см. рис.). В каждом незакрашенном маленьком кубике стоит число 0, а в покрашенном — 1. Разрешается выбрать 4 кубика, у которых есть общее ребро, и в каждом из них к числу прибавить по 1. Можно ли сделать так, чтобы все числа стали равными?



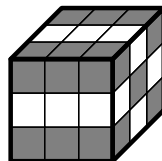
К задаче 5

Решение.

Раскрасим кубики в матрасную раскраску как на рисунке. Заметим, что изначально сумма в чёрных кубиках на 2 больше суммы в белых.

За одну операцию одновременно увеличиваются на 2 как сумма в чёрных кубиках, так и в белых.

Поэтому в чёрных кубиках сумма всегда будет на 2 больше суммы в белых.



6. Шахматный король обошёл всю доску 8×8 , побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.

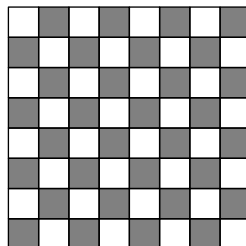
Решение.

Поскольку шахматный король при обходе доски вернулся на исходную клетку, то он сделал чётное количество ходов меняющих цвет клетки, на которой он стоял.

А это сумма вертикальных и горизонтальных ходов.

Всего он сделал 64 хода.

Поэтому количество диагональных ходов также чётно.



7. Квадрат 6×6 клеток покрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник 1×4 и перекрасить все его клетки в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?

Решение.

Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета (см. рис.).

Получим 10 зелёных, 9 синих, 8 белых и 9 красных клеток.

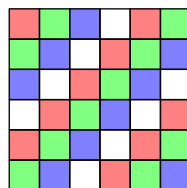
Количества синих и белых незакрашенных клеток изначально разной чётности.

Каждым ходом перекрашиваются все клетки в каком-то прямоугольнике 1×4 .

Одна из синих клеток перекрашивается в другой цвет и одна из белых.

Поэтому количества синих и белых незакрашенных клеток снова будет разной чётности.

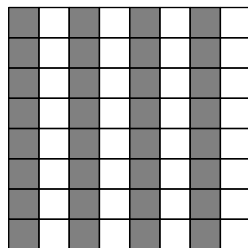
Значит, не получится закрасить 9 синих и 8 белых белую клетку в чёрный цвет.



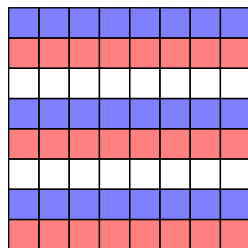
8. Можно ли разрезать квадрат 2027×2027 на горизонтальные доминошки и вертикальные прямоугольниками 1×3 ?

Решение.

Раскрасим матрасной раскраской в два цвета (см. рис.). Тогда чёрных полос будет на одну больше чем белых. Поэтому чёрных клеток будет на 2027 больше чем белых. В каждой горизонтальной доминошке поровну чёрных и белых клеток. Вертикальные прямоугольники 1×3 содержат клетки одного цвета. Поэтому разность между количеством клеток разных цветов должна делиться на 3. Но 2027 на 3 не делится.

**Решение.**

Раскрасим матрасной раскраской в три цвета (см. рис.). Тогда красных и синих полос будет поровну и на одну больше чем белых. Поэтому красных и синих клеток будет на 2027 больше чем белых. В каждом вертикальном прямоугольнике 1×3 есть клетки всех трёх цветов. Горизонтальные доминошки доминошке содержат клетки одного цвета. Поэтому разность между количеством клеток двух разных цветов должна быть чётной. Но 2027 нечётно.

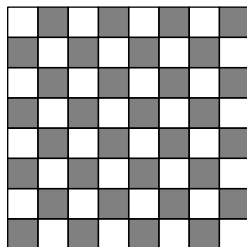


9. В левом нижнем углу клетчатой доски $n \times n$ стоит конь. Известно, что наименьшее число ходов, за которое конь может дойти до правого верхнего угла, равно наименьшему числу ходов, за которое он может дойти до правого нижнего угла. Найдите n .

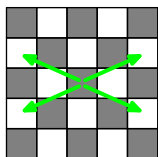
Решение.

Раскрасим доску $n \times n$ шахматной раскраской так, чтобы левое нижнее поле было чёрным.

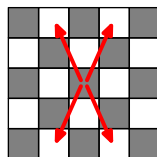
Если n чётно, то правое верхнее поле будет также чёрным, а правое нижнее — белым. Поскольку каждым ходом конь меняет цвет поля, на котором стоит, на противоположный, то любой путь из левого нижнего угла в правый верхний состоит из чётного количества ходов, а в правый нижний — из нечётного. Следовательно, их длины точно различны.



Пусть теперь n нечётно. Тогда правое верхнее поле и правое нижнее поле будут также чёрными и любой путь из левого нижнего угла как в правый верхний угол, так и в правый нижний угол состоит из чётного количества ходов. Обозначим $n = 2m + 1$. Для удобства назовём ход коня *горизонтальным*, если он по окончании хода смещается на две клетки по горизонтали и на одну клетку по вертикали, а иначе назовем ход *вертикальным*.



Горизонтальные ходы коня

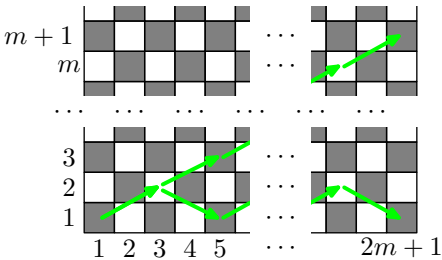


Вертикальные ходы коня

Пронумеруем вертикали слева направо и горизонтали снизу вверх от 1 до $2m + 1$. Для того, чтобы конь оказался в правом верхнем углу или в правом нижнем углу, ему нужно добраться до вертикали с номером $2m + 1$. Изначально конь стоит на первой вертикали и каждым ходом сдвигается вправо максимум на 2 вертикали. Таким образом, в правой вертикали конь может оказаться минимум за $((2m + 1) - 1) : 2 = m$ ходов.

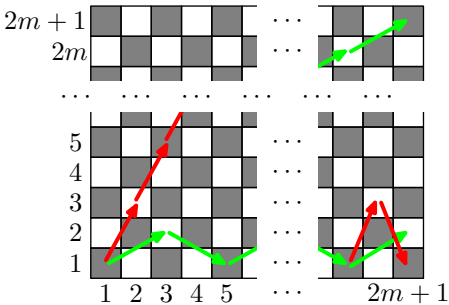
Если t чётно, то конь может добраться до правого нижнего угла ровно за t ходов, причём все ходы должны быть горизонтальными (см. пример на рисунке).

Но поскольку по окончании вертикального хода конь сдвигается на одну клетку по вертикали, то за t ходов он может сдвинуться максимум на t горизонталей вверх и оказаться на горизонтали с номером $t + 1$, которая ниже горизонтали с номером $2m + 1$. Таким образом, до верхнего правого угла невозможно добраться за t ходов.



Если t нечётно, то конь не может добраться до правого нижнего угла ровно за t ходов, но может добраться за $t + 1$ ходов, причём из них 2 хода должны быть вертикальными, а остальные — горизонтальными (см. пример на рисунке).

Рассуждая аналогично, получим, что для того, чтобы конь оказался в правом верхнем углу, ему нужно добраться до вертикали с номером $2m + 1$ и до горизонтали с номером $2m + 1$. Следовательно, конь должен сдвинуться на $2m$ вертикалей вправо за $t + 1$ ходов. Это возможно только если из них 2 хода вертикальные, а остальные горизонтальные.



Аналогично, конь должен сдвинуться на $2m$ горизонталей вверх за $t + 1$ ходов. Это возможно только если из них 2 хода горизонтальные, а остальные вертикальные.

Таким образом, должно быть ровно 2 вертикальных хода и 2 горизонтальных хода, итого всего 4 хода. Но с другой стороны ходов $t+1$. Поэтому $t = 3$ и $n = 2m+1 = 7$. Пример легко предъявить.

