

Аликвотные дроби

25 апреля 2026 • 6 класс, продвинутая группа

Дробь вида $\frac{1}{n}$, где n – натуральное число, называется *аликвотной*. Дробь, являющаяся суммой нескольких различных аликвотных дробей, называется *египетской*. Например, дробь $\frac{7}{12}$ – египетская, ведь $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

На самом деле, любая дробь является египетской. Так называемый *жадный* алгоритм представления заключается в выделении наибольшей возможной аликвотной дроби. Например, возьмем дробь $\frac{13}{17}$. В неё целиком «влезает» дробь $\frac{1}{2}$. Пусть $\frac{13}{17} = \frac{1}{2} + x$. Нетрудно посчитать, что $x = \frac{9}{34}$. Теперь сделаем то же самое для $\frac{9}{34}$. Заметим, что $\frac{1}{3}$ не влезает, ведь $\frac{9}{34} < \frac{9}{27}$, а вот $\frac{1}{4}$ влезает, ведь $\frac{9}{34} > \frac{9}{36}$. Тогда $\frac{9}{34} = \frac{1}{4} + y$. Оказывается, что $y = \frac{1}{68}$ – аликвотная дробь. Итого:

$$\frac{13}{17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{68}.$$

Можно доказать (полезное упражнение, проделали на лекции), что на каждом шаге этого алгоритма числитель у новой дроби строго уменьшается. Поэтому, рано или поздно, он придёт к единице. Рассуждение выше проведено для правильных дробей, для неправильных можно докрутить рассуждение, опираясь на то, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

неограниченно возрастает.

Разумеется, представления у одних и тех же дробей могут быть совершенно разными. К примеру, $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{60}$. И совсем не всегда жадный алгоритм дает самое короткое представление.

Важным инструментом для получения новых представлений является следующая формула:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Обсуждаются на семинаре

Задача 1. При каких n число $\frac{9}{20}$ представляется в виде суммы обратных к n различным натуральным числам?

Задача 2. Приведите пример аликвотной дроби, которая раскладывается в сумму двух различных аликвотных дробей, по крайней мере, двумя разными способами.

Задача 3. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Задача 4. В клубе перфекционистов 20 человек. На праздник они заказали 20 тортов, однако, один торт не довели. Можно ли разрезать оставшиеся 19 тортов и раздать куски членам клуба таким образом, чтобы каждый получил одинаковый набор из трех кусков?

Основные задачи

Задача 5. Пусть p – простое число.

- А) Докажите, что при $p \geq 5$ дробь $\frac{p-1}{p}$ нельзя представить в виде суммы двух различных аликвотных дробей;
- Б) **Письменно.** Докажите, что дробь $\frac{1}{p}$ всегда представима в виде суммы двух различных аликвотных дробей, причем единственным способом (с точностью до перестановки слагаемых);
- В) Докажите, что правильная дробь $\frac{m}{p}$ представима в виде суммы двух различных аликвотных дробей тогда и только тогда, когда $p+1$ делится на m .

Задача 6. Сумма восьми аликвотных дробей равна 1. Может ли при этом одна из дробей быть меньше $\frac{1}{10^{24}}$?

Задача 7. В клубе перфекционистов n человек. На праздник они заказали n тортов, однако, один торт не довели. При каком наибольшем n они смогут разрезать оставшиеся торты (каждый на несколько равных кусков) так, чтобы все члены клуба смогли получить одинаковый набор из трех кусков?

Задача 8. Существуют ли такие натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$, что a_k делится на k при всех k и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2026}} = 1?$$

Задача 9. Сумма обратных величин 100 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 10000?