

Инварианты

22 ноября 2025 • 6 класс, продвинутая группа

Инвариант – некоторая величина/свойство, которое не меняется при каждой операции/на каждом шаге. Частые инварианты: сумма/разность, четность чего-либо, делимость на некоторое число.

При сдаче необходимо четко формулировать, что именно является инвариантом в каждой задаче.

Задача 1. На доске написано число 1. С числом разрешается проводить две операции: умножать его на 2 и переставлять в нем цифры. Можно ли с помощью таких операций получить число 123456?

Задача 2. Числа 5, 11, 13, 17, 666, 1313 решили сразиться за титул самого страшного числа. У них есть следующие возможности:

- 1) Любое число может разбиться на два числа, сумма которых равна этому числу (например, число 17 может превратиться в числа 7 и 10);
- 2) Любые два числа могут объединиться в одно число, равное их сумме (например, числа 11 и 13 могут объединиться в число 24).

После ожесточенных боев осталось только одно число. Какое?

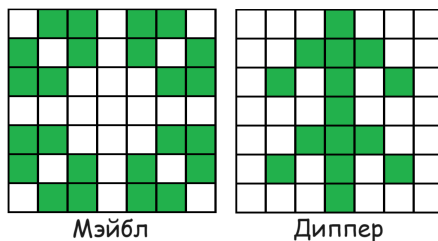
Задача 3. Даны три кучки, в каждой по 2025 камней. За один ход можно выбрать две кучки и убрать из них по одному камню, при этом добавив один камень в третью кучку. Можно ли действовать так, чтобы в итоге остался только один камень?

Задача 4. На окружности стоят 10 единиц. За одну операцию можно выбрать 4 подряд стоящих числа и из любого из них вычесть единицу, одновременно прибавив единицу к трём остальным. Можно ли несколькими такими операциями получить 10 чисел, равных 20?

Задача 5. В n коробках лежит по одному шарiku. За одну операцию разрешается переложить из одной коробки в другую ровно столько шариков, сколько в той уже есть (например, из коробки с 5 шариками в коробку с 3 шариками можно переложить ровно 3 шарика, чтобы стало 2 и 6 соответственно). При каких n такими операциями можно сложить все шарики в одну коробку?

Задача 6. На экран компьютера выведено число 13^{131} . Каждую секунду компьютер вычитает из числа последнюю цифру x , делит его на 10 и снова вычитает $9x$, а результат выводит на экран. Например, число 663 превратится в $(663-3)/10-3\cdot 9 = 39$. Докажите, что на экране компьютера никогда не появится число 131^{13} .

Задача 7. Мэйбл и Диппер раскрашивают изначально белую доску 7×7 . Ходят по очереди, начинает Мэйбл. Каждый выбирает произвольные $4k + 1$ клеток (k – любое натуральное от 1 до 12) и перекрашивает белые в зеленый, а зеленые в белый. Мэйбл хочет, чтобы после её хода на доске оказалась белая снежинка, а Диппер – чтобы после его хода на доске оказалась зелёная ёлочка (см. рисунок). Кто побеждает при правильной игре?



Задача 8. На столе лежит много пустых тарелок и одна большая, в которой 2025 плюшек. Каждую минуту Карлсон выбирает тарелку, в которой больше одной плюшки, съедает из неё одну плюшку, а затем перекладывает из какой-то тарелки несколько плюшек (не все!) в пустую. Через некоторое время Карлсон наелся, убрал все пустые тарелки и улетел. Могло ли после этого остаться в каждой тарелке по 6 плюшек?