

# Комбинаторика 2

21 марта 2026 • 6 класс, продвинутая группа

Часто в комбинаторике идет речь о перестановках  $n$  предметов, то есть, о количестве способов расставить в ряд эти  $n$  предметов. Все помнят, что таких перестановок ровно  $n!$ . Можно поставить вопрос следующим образом: сколькими способами можно расставить в ряд  $k$  из этих  $n$  предметов? Одна такая выборка для определенного  $k$  называется *размещением*, а *число размещений из  $n$  по  $k$  элементов* обозначается, как  $A_n^k$ . Читается это так: « $A$  из  $n$  по  $k$ ». Если  $k = n$ , то, по определению, размещение становится перестановкой.

Для того, чтобы вывести формулу для подсчета числа размещений, расставим в ряд все  $n$  предметов (способов  $n!$ ), а смотреть будем на первые  $k$  из них: их мы и выберем. При таком подсчете будут считаться разными варианты расстановки последних  $n - k$  предметов, а для нас эти варианты одинаковые (ведь последние нам не интересны). Поэтому нужно  $n!$  поделить на  $(n - k)!$ , и получить, что

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Когда мы говорим о размещениях, для нас имеет значение порядок, в котором выбираются предметы. То есть, сначала выбрать предмет  $x$ , а потом предмет  $y$  – не то же самое, что сначала выбрать предмет  $y$ , а потом предмет  $x$ . Часто в задачах этот порядок не важен, а требуется только выяснить, сколько различных наборов из  $k$  элементов можно выбрать из данного множества. Любой такой набор из  $k$  элементов называется *сочетанием*, а *число сочетаний из  $n$  по  $k$  элементов*, то есть, количество способов выбрать  $k$  элементов из имеющихся  $n$ , обозначается, как  $C_n^k$ . Читается, как: « $C$  из  $n$  по  $k$ ».

Для того, чтобы вывести формулу для подсчета числа сочетаний, рассмотрим всевозможные размещения: в них каждое множество из  $k$  предметов повторяется  $k!$  раз, откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

P.S. Число  $0!$  по определению считается равным 1.

## Обсуждаются на семинаре

**Задача 1.** Найдите количество способов разбить 10 человек:

- А) на две команды по 5 человек: синюю и красную;
- Б) на две группы по 5 человек;
- В) на пять групп по 2 человека.

**Задача 2.** Докажите, что  $C_n^k = C_n^{n-k}$  двумя способами:

- А) Алгебраически (через формулу);
- Б) Комбинаторно (через определение).

**Задача 3.** Когда мы говорили про размещения, каждый предмет мы использовали ровно по одному разу. Иногда это условие снимается (например, в задачах на составление слов из букв алфавита), то есть, нас интересует количество способов выстроить в ряд  $k$  предметов из  $n$ , причем некоторые предметы могут повторяться (сколько угодно раз, вплоть до  $k$ ). В таком случае говорят, что речь идет о *размещениях с повторениями*, и обозначается это как  $\overline{A}_n^k$ . Выведите формулу для  $\overline{A}_n^k$ . Обычные размещения  $A_n^k$  также называют размещениями без повторений.

**Задача 4.** Для каждой из приведенных ниже задач определите, про что она: про перестановки, размещения (без повторений), размещения с повторениями или сочетания. Кратко обоснуйте свой выбор и напишите ответы к задачам:

- В футбольном чемпионате играет 16 команд. Сколькими разными способами могут определиться победитель, второй и третий призёры?
- Сколькими способами можно разложить 10 разных писем по 10 разным конвертам (в каждый конверт – по письму)?
- Сколько сторон и диагоналей (вместе взятых) у 100 – угольника?
- Назовем число *отличным*, если сумма любых двух соседних его цифр делится на 5. Сколько отличных семизначных чисел оканчиваются на 7?
- Сколькими способами можно расставить на шахматной доске  $8 \times 8$  8 ладей, не бьющих друг друга?
- В шахматном турнире участвовали 10 человек, каждый сыграл с каждым по одному разу. Сколько всего было партий?

## Основные задачи

**Задача 5.** В этой задаче необходимо показать вычисления, подготовьте их заранее (например, фотографию). Вычислите:

$$\text{А) } C_5^3 + C_7^4; \quad \text{Б) } C_{100}^1 + C_{100}^{100}; \quad \text{В) } \frac{3 \cdot C_n^3}{C_n^2}; \quad \text{Г) } A_n^2 - 2C_n^2$$

**Задача 6.** В турнире по карточной игре «Дурак» принимали участие 9 человек. В каждой партии играли 3 человека, при этом каждый человек сыграл с каждой парой других людей ровно по 1 разу. Сколько всего партий было в турнире?

**Задача 7.** Докажите, что количество способов поставить  $k$  одинаковых, не бьющих друг друга ладей на доску  $n \times n$  равно  $C_n^k \cdot A_n^k$ .

**Задача 8.** Докажите, что  $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$  двумя способами: **А)** алгебраически и **Б)** комбинаторно.

**Задача 9.** Рассмотрим клетчатую таблицу  $20 \times 26$ . Посчитайте общее количество прямоугольников внутри неё. Например, внутри таблицы  $2 \times 2$  ровно 9 прямоугольников: 4 прямоугольника  $1 \times 1$ , 4 прямоугольника  $1 \times 2$ , 1 прямоугольник  $2 \times 2$ .

**Задача 10.** В полном графе на 11 вершинах стерли 18 ребер. Докажите, что в нём найдется, по крайней мере, 3 «треугольника» (возможно, с пересекающимися вершинами).

**Задача 11. Письменно.** В марафоне участвуют 10 человек. Получить медаль можно, если выполнены оба условия:

1) Бегун преодолел дистанцию первым, вторым или третьим (получает золотую, серебряную или бронзовую медаль соответственно).

2) Бегун преодолел дистанцию менее, чем за 4 часа.

Сколько различных вариантов распределения медалей может быть на этом марафоне?

**Задача 12. Письменно.** Найдется ли 333 способа выбрать 3 различных числа от 1 до 18 таким образом, чтобы их произведение делилось на 9?