

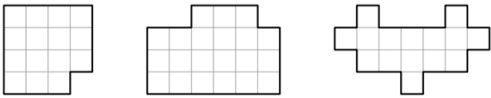
Программа зачёта

Конструктивы с числами

- 1. Миллионер Корейко купил у Остапа Бендера компрометирующую его расписку и получил причитающуюся ему сдачу; при этом использовались купюры только в 63 и 350 тугриков. Какую наименьшую сумму могла стоить расписка?
- 2. На доске написаны числа $2, 3, 4, \dots, 29, 30$. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?
- 3. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких *различных* букв. Например, если спросить « $A + B = ?$ », то в случае, когда $A = 9, B = 1, C = 0$, ответом будет « $A + B = BC$ ». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?

Периметры, площади и разрезания

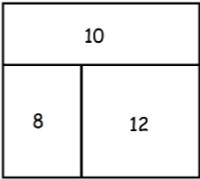
- 4. Разрежьте каждую фигуру на 3 равные части. Резать можно только по сторонам клеток.



- 5. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.

30		?
21	35	
	10	8

- 6. Квадрат разбили на три прямоугольника как показано на рисунке. Их периметры равны 8, 10, 12 см. Найдите периметр квадрата.



Задачи про клеточки

7. Профессор Дирихле хочет посадить 37 кроликов в клетки квадрата 4×4 так, чтобы в любом уголке из трех клеток было, по крайней мере, 7 кроликов. Получится ли у него это сделать?
8. Аня разбила клетчатый квадрат 6×6 на уголки из трех клеток, прямоугольнички 1×3 и квадраты 2×2 . Всего у нее получилось 11 фигур.
 - а) Сколько среди них квадратов 2×2 ?
 - б) Таня возле каждой из 49 вершин клеток подписала, сколько фигур её содержат (фигура содержит точку, если точка лежит на её границе или внутри). Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?
9. Докажите, что клетки доски 8×8 нельзя раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 4×4 чёрных клеток было больше, чем белых, а в любом прямоугольнике 3×5 чёрных клеток было меньше, чем белых.

Знакомство с графами

10. Обязательно ли два графа на 6 вершинах изоморфны, если степень каждой вершина равна 3?
11. Докажите, что в любом графе (у которого не менее двух вершин) найдутся две вершины одинаковой степени.
12. Можно ли придумать такую доску, что из некоторых её клеток конь может обойти все её клетки ровно по одному разу и вернуться назад, из других — может обойти все её клетки ровно по одному разу, но вернуться назад не сможет, а из третьих — не сможет даже просто обойти все клетки доски ровно по одному разу. А только клетки последних двух типов?

Графы 2

13. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц (улицы соединяют площади). Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.
14. **Теорема о количестве рёбер в двудольном графе.** Докажите, что в двудольном графе количеству рёбер равно сумме степеней вершин в каждой доле.
15. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

Комбинаторика

16. В классе учится 15 мальчиков и 13 девочек. Старостой класса может стать Максим или Вероника. Староста выбирает себе заместителя из учеников того же пола.
- а) Сколько способов назначить старосту и заместителя?
- б) А если старостой может стать абсолютно любой ученик (условие про заместителя остается)?
17. *Палиндромом* называется число, которое одинаково записывается слева направо и справа налево. Например, 2020202 или 1357531. Сколько существует семизначных палиндромов?
18. Найдите количество раскрасок клеток квадрата 3×3 в 5 цветов, при которых во всех строках, столбцах и двух главных диагоналях цвета клеток не повторяются (квадрат фиксирован, не поворачивается и не переворачивается).

Комбинаторика 2

19. Аня забыла пароль от своего телефона. Она помнит лишь, что он состоит из четырех цифр, и что хотя бы одна из них находится в верхней строчке (то есть, равна 1, 2 или 3). Сколько вариантов паролей придётся перебрать бедной Ане, чтобы гарантированно разблокировать телефон?
20. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?
21. Найдите количество способов расставить 8 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей.

Подсчёт двумя способами

22. Некоторые клетки таблицы 6×6 покрасили в черный цвет. Могло ли так оказаться, что в каждом квадрате 2×2 закрашено две клетки, а в каждом прямоугольнике 1×3 — одна?
23. Девочки и мальчики играли в снежки. Каждая девочка запустила 12 снежков, а каждый мальчик — 19 снежков. В итоге оказалось, что в каждую девочку прилетело по 15 снежков, а в каждого мальчика — по 17 снежков (каждый снежок попал в цель). Кого было больше, мальчиков или девочек?
24. Имеется много одинаковых треугольников. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 2, 3, 4. Треугольники сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из трех углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом угле стопки сумма равна 2026?

Математические игры

25. Двое по очереди ставят на шахматную доску слонов. Проигрывает тот, после чьего хода на доске окажутся два слона, которые бьют друг друга.
26. На столе лежат 13 мандаринок по кругу. За ход разрешается съесть один или два лежащих рядом мандаринки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
27. На столе лежит 100 камней. Разрешается за ход выкинуть со стола не меньше одного камня и не больше половины всех камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Математические игры 2

28. На столе лежат две коробки конфет: в каждой коробке по 11 конфет. Каждый игрок своим ходом может съесть две конфеты из одной коробки и одну конфету из другой коробки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
29. На шахматной доске стоит конь. Двое по очереди ходят им, при этом запрещается ставить его на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.
30. На столе доньшками вниз стоит 2026 пустых стаканов. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть один стакан, за второй — один или два стакана, за третий — один, два или три стакана, и так далее. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы будут расположены доньшками вверх.

Делимость

31. Нескольким зверюшкам раздали 210 долек апельсина. Выяснилось, что зайчику досталось меньше всех долек, и остальные зверюшки передали по одной своей дольке зайчику. После этого у всех зверей стало ровно по x долек. Найдите максимально и минимально возможное значение x .
32. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?
33. Существует ли решение у ребуса $ОСЫ \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = **000000$? (Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые, а звёздочками — любые.)

Десятичная запись числа, признаки делимости

34. Число $\overline{54XY2}$ делится на 36. Найти его цифры X и Y .
35. Из четырёх цифр, отличных от нуля, составлены два четырёхзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?
36. Взяли число 2027! и вычислили сумму его цифр, у полученного числа снова вычислили сумму его цифр и так далее до тех пор, пока не получилось однозначное число. Найдите это однозначное число.

Разделяй и властвуй

37. На доску 10×10 расставили фишки так, что в каждом квадрате 3×3 есть не более 1 фишки. Какое наибольшее количество фишек может стоять на доске?
38. По кругу расставили числа от 1 до 9. Докажите, что найдутся три подряд идущих числа, сумма которых меньше 15.
39. Фигура Пыжик бьёт через одну или через две клетки в любом направлении. Какое наибольшее количество Пыжиков можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Больше-меньше

40. Аня, Соня, Егор и Серёжа решали задачи. Аня решила больше всех, Соня не меньше всех, а Егор – больше, чем Серёжа. Верно ли, что девочки обязательно решили задачи больше, чем мальчики?
41. У Кирилла и Вовы было по тарту. Кирилл разрезал свой торт на 11 одинаковых кусков, а Вова – на 7. Оказалось, что три кусочка торта Кирилла тяжелее двух кусков вовиногo торта, а пять вoвиных кусков тяжелее шести кусков Кирилла. Чей торт тяжелее?
42. В игре «Эрудит» осталось 14 букв, некоторые из которых – тяжелые, весящие одинаково, а остальные – легкие, также весящие одинаково. Известно, что составленное из этих букв слово ГРОЗНЫЙ тяжелее, чем слово УЧИТЕЛЬ, слово ГУЛ тяжелее, чем РОТ, а буква Т тяжелее Г. Перечислите все легкие буквы.