

Чётность

Эффект «плюс-минус один»

Эффект «плюс-минус один» возникает при подсчёте количества предметов.

Интуиция подсказывает число, которое обычно отличается на единицу от правильного ответа.

Задача 1

(а) 100 чёрных квадратов и несколько белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались (см. рис.). Первым расположен чёрный квадрат, а последним — белый треугольник. Сколько белых треугольников?



(б) 100 чёрных квадратов и несколько белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались (см. рис.). Первым расположен чёрный квадрат, а последним — белый треугольник. Сколько белых треугольников?



(с) А если квадраты и треугольники были расположены не в ряд, а по кругу?

Решение:

Справа от каждого квадрата, кроме последнего, есть треугольник.

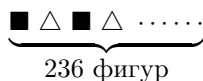
(а) Поэтому треугольников столько же, сколько и квадратов, то есть 100.

(б) Поэтому треугольников на один меньше, чем квадратов, то есть 99.

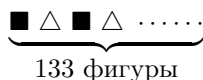
(с) Поэтому треугольников столько же, сколько и квадратов, то есть 100.

Задача 2

(а) Несколько чёрных квадратов и белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались. Первым расположен чёрный квадрат (см. рис.). Сколько чёрных квадратов и белых треугольников, если всего фигур 236?



(б) Несколько чёрных квадратов и белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались. Первым расположен чёрный квадрат (см. рис.). Сколько чёрных квадратов и белых треугольников, если всего фигур 133?



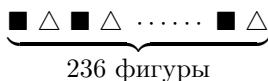
Решение:

По предыдущей задаче мы знаем, что треугольников либо столько же, сколько квадратов, либо их на один меньше.

(а)

$$236 : 2 = 118$$

Значит, квадратов и треугольников поровну, по 118 штук.



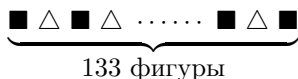
(б)

$$133 : 2 = 66 \text{ (ост. 1)}$$

Значит, квадратов и треугольников поровну быть не может.

Тогда треугольников на один меньше, чем квадратов.

Квадратов 67 штук, а треугольников 66 штук.



Эффект «плюс-минус один»

Эффект «плюс-минус один» возникает при подсчёте количества предметов.

Интуиция подсказывает число, которое обычно отличается на единицу от правильного ответа.

А если ошибиться на единицу во всех промежуточных вычисления, то итоговой ответ будет сильно отличаться от правильного.

Задача 3

На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

Решение:

Кольца располагаются между кусками, то есть кольца и куски чередуются. Сначала идёт кусок, потом кольцо, кусок, кольцо, ...

□ | □ | □ | □ | □ | □ |

Поэтому колец на одно меньше, чем кусков.

Значит, красных колец будет 4, жёлтых — 6, а зелёных — 10.

Всего колец 20.

Если по ним разрезать, то кусков получится на один больше, то есть 21.

Эффект «плюс-минус один»

Эффект «плюс-минус один» возникает при подсчёте количества предметов.

Интуиция подсказывает число, которое обычно отличается на единицу от правильного ответа.

Рассмотрим следующий пример.

Сколько натуральных чисел от 1234 до 2025?

Интуиция подсказывает ответ $2025 - 1234 = 791$ число, но это неправильный ответ!

Рассмотрим способ как можно посчитать правильно.

$$\overbrace{1, 2, 3, \dots, 1233}^{1233 \text{ числа}}, \overbrace{1234, \dots, 2025}^{2025 \text{ чисел}}.$$

1233 чисел ? чисел

Из всех чисел от 1 до 2025 (их 2025 штук) надо вычесть те, которые считать не надо, от 1 до 1233 (их 1233 штуки).

Тогда останутся только числа от 1234 до 2025, значит, правильный ответ $2025 - 1233 = 792$ числа.

Задача 4

Вася, идя по улице, увидел дом с номером 17 и начал считать дома. Последний дом, который он посчитал имел номер 51. Сколько домов сосчитал Вася?

Решение:

Нам нужно посчитать сколько натуральных чисел от 17, до 51.

$$\overbrace{1, 2, 3, \dots, 16}^{16 \text{ чисел}}, \overbrace{17, \dots, 51}^{51 \text{ число}}.$$

16 чисел ? чисел

Значит, всего $51 - 16 = 35$ чисел. Вася сосчитал 35 домов.

Задача 5

Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 439, а номер последней записывается теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?

Решение:

Последний номер больше 439, значит, либо 934, либо 943.

Посчитаем сколько чисел от 439 до 934.

$$\overbrace{1, 2, 3, \dots, 438, 439, \dots, 934}^{934 \text{ числа}}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{438 \text{ чисел}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{? \text{ чисел}}$

Их будет $934 - 438 = 496$.

Посчитаем сколько чисел от 439 до 943.

$$\overbrace{1, 2, 3, \dots, 438, 439, \dots, 943}^{943 \text{ числа}}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{438 \text{ чисел}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{? \text{ чисел}}$

Их будет $943 - 438 = 505$.

Получается, что в выпавшем куске либо 496 страниц, либо 505.

Но на каждом листе две страницы!

Значит, количество листов должно делиться на 2.

$$496 : 2 = 248, \quad 505 : 2 = 252 \text{ (ост. 1)}$$

505 не подходит, поэтому страниц 496.

Напоминание о свойствах сложения и умножения

Переместительное свойство сложения.

От перестановки мест слагаемых сумма не меняется.

$$A + B = B + A$$

Сочетательное свойство сложения.

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно первое число прибавить к сумме второго и третьего.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Из свойств сложения следует, что *при сложении нескольких чисел слагаемые можно менять местами и заключать их в скобки, определяя порядок вычислений.*

Пример.

$$A + B + C + D = (A + D) + (B + C)$$

$$13 + 21 + 39 + 47 = (13 + 47) + (21 + 39) = 60 + 60 = 120$$

Свойство вычитания суммы из числа.

Чтобы из числа вычесть сумму двух слагаемых, можно из этого числа вычесть одно из слагаемых и потом из результата вычесть другое слагаемое.

$$A - (B + C) = A - B - C$$

Из свойств сложения и свойства вычитания следует, что *при вычитании нескольких чисел вычитаемые можно менять местами и вычитать в любом удобном порядке.*

$$A - B - C = A - C - B$$

$$A - B - C = A - (B + C)$$

$$A - C - B = A - (C + B)$$

Пример.

$$A + B - C - D = (A + B) - (C + D) = (A - D) + (B - C) = (A - C) + (B - D)$$

$$32 + 61 - 52 - 11 = (32 - 11) + (61 - 52) = 21 + 9 = 30$$

$$32 + 61 - 52 - 11 = (32 - 52) + (61 - 11) = -20 + 50 = 30$$

У умножения и деления свойства похожи на свойства сложения и вычитания.

Переместительное свойство умножения.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Сочетательное свойство умножения.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = (A \cdot D) \cdot (B \cdot C)$$

$$A : (B \cdot C) = A : B : C$$

$$A : B : C = A : C : B$$

$$A \cdot B : C : D = (A \cdot B) : (C \cdot D) = (A : D) \cdot (B : C) = (A : C) \cdot (B : D)$$

Распределительное свойство умножения относительно сложения.

Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Распределительное свойство умножения относительно вычитания.

$$A \cdot B - A \cdot C = A \cdot (B - C)$$

Но бы будем замечать и использовать эти свойства наоборот:

$$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$$

$$A \cdot B - A \cdot C = A \cdot (B - C)$$

Чётные и нечётные числа

Чётным называется целое число, которое делится на 2.

$$A : 2 = B \quad \Leftrightarrow \quad A = 2 \cdot B$$

Нечётным называется целое число, которое не делится на 2.

$$C : 2 = D \text{ (ост. 1)} \quad \Leftrightarrow \quad C = 2 \cdot D + 1$$

Нечётное число на 1 больше некоторого чётного.

$$\dots, \quad 2 \cdot D, \quad \underbrace{2 \cdot D + 1}_C, \quad \underbrace{2 \cdot (D + 1)}_{C+1}, \quad \dots$$

Нечётное число на 1 меньше некоторого чётного.

$$C + 1 = 2 \cdot D + 2 = \underbrace{2 \cdot D + 2 \cdot 1}_{A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)} = 2 \cdot (D + 1)$$

Задача 6

Сколько нечётных чисел от 300 до 700? А сколько чётных?

Решение:

Посчитаем сколько всего чисел от 300 до 700

$$\overbrace{1, 2, 3, \dots, 299}^{299 \text{ чисел}}, \overbrace{300, \dots, 700}^{700 \text{ чисел}}, \overbrace{}{? \text{ чисел}}.$$

Значит, всего $700 - 299 = 401$ число.

Чётные и нечётные числа чередуются, сначала идёт 300 — чётное число, а в конце идёт 700 тоже чётное число.

Поэтому нечётных чисел на одно меньше, чем чётных.

Значит, всего 201 чётное число и 200 нечётных.

Чётность суммы и разности чисел

$$\mathbb{C} + \mathbb{C} = ?, \quad \mathbb{C} - \mathbb{C} = ?,$$

$$\mathbb{H} + \mathbb{C} = ?, \quad \mathbb{H} - \mathbb{C} = ?,$$

$$\mathbb{C} + \mathbb{H} = ?, \quad \mathbb{C} - \mathbb{H} = ?,$$

$$\mathbb{H} + \mathbb{H} = ?, \quad \mathbb{H} - \mathbb{H} = ?.$$

$$\boxed{A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)}$$

$$\boxed{A \cdot B - A \cdot C = A \cdot (B - C)}$$

$$\mathbb{C} + \mathbb{C} = 2 \cdot B + 2 \cdot E = 2 \cdot (B + E) = \mathbb{C},$$

$$\mathbb{C} - \mathbb{C} = 2 \cdot B - 2 \cdot E = 2 \cdot (B - E) = \mathbb{C},$$

$$\mathbb{H} + \mathbb{C} = 2 \cdot C + 1 + 2 \cdot B = \underbrace{2 \cdot C + 2 \cdot B}_{2 \cdot (C+B)} + 1 = 2 \cdot (C + B) + 1 = \mathbb{H},$$

$$\mathbb{C} + \mathbb{H} = \mathbb{H} + \mathbb{C} = \mathbb{H},$$

$$\boxed{A - (B + C) = A - B - C}$$

$$\mathbb{H} - \mathbb{C} = 2 \cdot C + 1 - 2 \cdot B = \underbrace{2 \cdot C - 2 \cdot B}_{2 \cdot (C-B)} + 1 = 2 \cdot (C - B) + 1 = \mathbb{H},$$

$$\mathbb{C} - \mathbb{H} = 2 \cdot B - (2 \cdot C + 1) = \underbrace{2 \cdot B - 2 \cdot C}_{2 \cdot (B-C)} - 1 = 2 \cdot (B - C) - 1 = \mathbb{H},$$

$$\mathbb{H} + \mathbb{H} = 2 \cdot C + 1 + 2 \cdot F + 1 = \underbrace{2 \cdot C + 2 \cdot F}_{2 \cdot (C+F)} + \underbrace{1 + 1}_2 = \underbrace{2 \cdot (C + F) + 2}_{2 \cdot (C+F) + 2 \cdot 1} = 2 \cdot (C + F + 1) = \mathbb{C},$$

$$\mathbb{H} - \mathbb{H} = 2 \cdot C + 1 - (2 \cdot F + 1) = 2 \cdot C + 1 - 2 \cdot F - 1 = \underbrace{2 \cdot C - 2 \cdot F}_{2 \cdot (C-F)} + \underbrace{1 - 1}_0 = 2 \cdot (C - F) = \mathbb{C}.$$

Чётность суммы и разности чисел

Теперь заполним знаки «?»:

$$\text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч}, \quad \text{Ч} - \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Ч} = \text{Н}, \quad \text{Н} - \text{Ч} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}, \quad \text{Ч} - \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Н} + \text{Н} = \text{Ч}, \quad \text{Н} - \text{Н} = \text{Ч}.$$

Будем говорить, что *два числа имеют разную чётность*, если одно из них чётно, а другое нечётно. Иначе будем говорить, что *два числа имеют одинаковую чётность*.

Свойства:

- Сумма двух чисел разной чётности нечётна.
- Сумма двух чисел одной чётности чётна.
- Разность двух чисел и сумма тех же чисел одной чётности.

Задача 7

У Пети есть четыре палочки длины 1 см, две палочки длины 2 см, семь палочек длины 3 см и пять палочек длины 4 см. Он хочет сложить из них прямоугольник используя все палочки. Удастся ли ему это? (Ломать палочки нельзя.)

Решение:

Периметр прямоугольника равен $P = 2(a + b)$, где a — длина прямоугольника, а b — его ширина.

Число $P = 2(a + b)$ чётное.

Посчитаем сумму длин всех палочек

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 49.$$

49 — нечётное, а периметр прямоугольника чётный.

Задача 8

Сумма трёх чисел нечётна. Сколько может быть нечётных слагаемых?

Решение:

Рассмотрим какие могут быть варианты:

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} = ?,$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Н} = ?,$$

$$\text{Ч} + \text{Н} + \text{Н} = ?,$$

$$\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = ?.$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} = (\text{Ч} + \text{Ч}) + \text{Ч} = \text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Н} = (\text{Ч} + \text{Ч}) + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} + \text{Н} = (\text{Ч} + \text{Н}) + \text{Н} = \text{Н} + \text{Н} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = (\text{Н} + \text{Н}) + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Теперь заполним знаки «?»:

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \text{Н} + \text{Н} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Нам подходят второй и четвёртый варианты, значит, может быть одно или три нечётных слагаемых.

Чётность суммы нескольких слагаемых

$$\text{Ч} + \text{Ч} + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = (\text{Ч} + \text{Ч}) + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = \text{Ч} + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = \dots = \text{Ч}.$$

$$\underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н} + \text{Н}}_{\text{чётное количество}} = (\text{Н} + \text{Н}) + (\text{Н} + \text{Н}) + \dots + (\text{Н} + \text{Н}) = \text{Ч} + \text{Ч} + \dots + \text{Ч} = \text{Ч}.$$

$$\underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н}}_{\text{нечётное количество}} = \underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н} + \text{Н}}_{\text{чётное количество}} + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \dots + \text{Ч} + \underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н}}_{\text{нечётное количество}} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н},$$

$$\text{Ч} + \dots + \text{Ч} + \underbrace{\text{Н} + \text{Н} + \dots + \text{Н}}_{\text{чётное количество}} = \text{Ч} + \text{Ч} = \text{Ч}.$$

Свойства:

- Сумма любого количества чётных чисел чётна.
- Сумма чётного количества нечётных чисел чётна.
- Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна.
- Чётность суммы зависит только количества нечётных слагаемых в ней.

Задача 8

Сумма трёх чисел нечётна. Сколько может быть нечётных слагаемых?

Решение:

Поскольку сумма нечётна, то количество нечётных слагаемых в этой сумме нечётно.

Следовательно, может быть одно или три нечётных слагаемых.

Задача 9

Не вычисляя суммы $1 + 2 + 3 + \dots + 2025$, определите её чётность.

Решение:

Чётные и нечётные числа чередуются, первое число нечётное и последнее тоже нечётное.

Значит, чётных чисел на одно меньше, чем нечётных.

Тогда в сумме 1012 чётных слагаемых и 1013 нечётных слагаемых. Поэтому сумма нечётна.

Чётность произведения

$$\text{Ч} \cdot \text{Ч} = ?,$$

$$\text{Ч} \cdot \text{Н} = ?,$$

$$\text{Н} \cdot \text{Ч} = ?,$$

$$\text{Н} \cdot \text{Н} = ?.$$

$$\text{Ч} \cdot X = 2 \cdot B \cdot X = 2 \cdot B \cdot X = \text{Ч},$$

$$\text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Н} \cdot (2 \cdot C + 1) = \text{Н} \cdot 2 \cdot C + \text{Н} = 2 \cdot \text{Н} \cdot C + \text{Н} = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Теперь заполним знаки «?»:

$$\text{Ч} \cdot \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Ч} \cdot \text{Н} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} \cdot \text{Ч} = \text{Ч},$$

$$\text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Н}.$$

Свойства:

- Произведение чётного числа на любое целое число чётно.
- Произведение двух нечётных чисел нечётно.

Задача 10

Сумма двух чисел нечётна. Каким — чётным или нечётным — будет их произведение?

Решение:

$$A + B = \text{Н},$$

$$A \cdot B = ?$$

Первый способ.

Числа A и B разной чётности, значит одно из них чётное. Поэтому произведение чётно.

Второй способ.

Произведение не может оказаться нечётным, так как тогда бы оба числа A и B были бы нечётными. Но сумма двух нечётных чисел не может оказаться чётной.

Чётность произведения нескольких чисел

$$Н \cdot Н \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = (Н \cdot Н) \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = Н \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = \dots = Н.$$

$$Ч \cdot Ч \cdot \dots \cdot Ч \cdot Н \cdot \dots \cdot Н = Ч \cdot \underbrace{(Ч \cdot \dots \cdot Ч \cdot Н \cdot \dots \cdot Н)}_{\text{обозначим за } X} = Ч \cdot X = Ч.$$

Свойства:

- Произведение любого количества нечётных чисел нечётно.
- Произведение любого количества чисел, среди которых есть хотя бы одно чётное, чётно.

Задача 11

Сумма трёх чисел чётна. Каким — чётным или нечётным — будет их произведение?

Решение:

$$\begin{aligned} A + B + C &= Ч, \\ A \cdot B \cdot C &= ? \end{aligned}$$

Первый способ.

Поскольку сумма чётна, то среди слагаемых есть чётное число.

Значит, произведение чётно.

Второй способ.

Чтобы произведение было нечётно, все множители должны быть нечётными.

Но тогда сумма трёх нечётных чисел будет нечётной.

Задача 12

Сумму двух натуральных чисел умножили на их произведение. Докажите, что получилось чётное число.

Решение:

$$(A + B) \cdot AB$$

Первый способ. Если одно из чисел A или B чётно, то произведение чётно.

Если оба числа нечётны, то их сумма чётна, поэтому произведение снова чётно.

Второй способ.

Если произведение $(A + B) \cdot AB$ оказалось бы нечётным, то оба числа $A + B$ и AB должны быть нечётными.

Но AB нечётно, когда оба числа A и B нечётны, а $A + B$ нечётно, когда числа A и B разной чётности.

Задача 13

Можно ли найти (с) три, (d) четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечётными числами?

Решение:

Если произведение нечётно, то все множители нечётны.

А чтобы сумма нечётных чисел была нечётна надо чтобы их было нечётное количество.

Поэтому (a) да, например 1, 3, 5, (b) нет.

Задача 14

Семнадцать учеников купили в буфете по два пирожка: с картошкой и с яблоком. Некоторые из них не любят пирожки с картошкой, а остальные не любят пирожки с яблоком. Могут ли они обменяться друг с другом пирожками, чтобы у каждого было по два пирожка с одной начинкой?

Решение:

Всего 17 пирожков с яблоком (как и с картошкой). Но 17 — нечётное число...

Задача 15

В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

Решение:

Всего депутатов чётное количество.

Первый способ.

Значит, количество голосов «за» и «против» одной чётности.

Но тогда их разность чётна.

Но 23 — нечётное число.

Второй способ.

Обозначим количество голосов «против» за x , тогда количество голосов «за» равно $x + 23$.

Тогда их сумма

$$x + x + 23 = 2x + 23 = \text{Ч} + \text{Н} = \text{Н}.$$

Но их сумма равна количеству депутатов.

Задача 16

Кузнечик прыгает по прямой, каждым прыжком на 1 см. Через несколько прыжков кузнечик оказался там, где начинал. Докажите, что он сделал чётное количество прыжков.

Решение:

Первый способ.

Количество прыжков в одну сторону равно количеству прыжков обрано, значит, их сумма чётна.

Второй способ.

При прыжке на числовой прямой кузнечик прибавляет к своей координате 1, если прыгает вправо, и вычитает из своей координаты 1, если прыгает влево.

Поэтому прыжки кузнечика записываются в виде выражения:

$$+1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + \dots = 0$$

По условию эта сумма равна 0.

Поскольку сумма и разность чисел одной чётности, то число

$$+1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \quad \text{чётно.}$$

Но это число равно количеству прыжков кузнечика.

Задача 17

Никита купил тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Сергей вырвал из этой тетради 30 листов и сложил все 60 чисел, которые написаны на них. Могло ли у него получиться число 2025?

Решение:

На каждом листе две страницы, на которых написано два последовательных числа, одно из них чётное, а другое нечётно.

Значит, сумма этих чисел на листе нечётна.

Всего 30 листов, значит сумма 30 нечётных чисел чётна.

Но 2025 — нечётно.

Задача 18

(а) Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр — достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

(b*) Можно ли разменять 50 рублей при помощи десяти купюр — достоинством в 2, 6 и 10 рублей?

Решение:

(а) Числа 1, 3 и 5 нечётны, сумма 10 нечётных чисел чётна. Но 25 — нечётно.

(b) Заметим, что все числа увеличились ровно в два раза.

$$\begin{aligned} 50 &= 2 + 6 + 2 + 2 + 10 + 6 + 2 + 2 + \dots & | : 2 \\ 25 &= 1 + 3 + 1 + 1 + 5 + 3 + 1 + 1 + \dots \end{aligned}$$

Если бы получилось представить число 50 в виде суммы 10 чисел, каждое из которых равно 2, 6 и 10, то разделив это равенство на 2, получилось бы, что число 25 можно представить в виде суммы 10 чисел, каждое из которых равно 1, 3 и 5, то разделив это равенство на 2.

Чётность и чередование

Идея 1. Если в ряд лежат предметы двух видов чередуясь, то

- первый и последний предметы разного вида, если всего предметов чётное количество;



- первый и последний предметы одного вида, если всего предметов нечётное количество.



Задача 19

Вдоль забора растут восемь кустов малины.

Число ягод на соседних кустах отличается на единицу.

Может ли на всех кустах быть вместе 2025 ягод?

Решение:

На соседних кустах количество ягод разной чётности.

Поэтому «чётные» и «нечётные» кусты чередуются.

Всего кустов чётное количество.

Значит, там 4 куста с чётным количеством ягод и 4 куста с нечётным количеством ягод.

Но тогда сумма всех ягод чётна, а 2025 — нечётное число.

Задача 20

Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 2025 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение:

После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго — на земле, после третьего — на камне, и так далее...

Его положения на камне и на земле чередуются:

на камне, на земле, на камне, на земле

Положений было нечётное количество, значит после 2025 прыжка, он окажется на камне.

на камне, на земле, на камне, на земле, на камне, на земле, на камне

Чётность и чередование

Идея 2. Если в задаче присутствует *процесс* и некоторая величина, которая принимает ровно два значения (например Ч и Н), и на каждом шаге этого *процесса* величина поочерёдно принимает эти значения, то

- на каждом чётном шаге этого процесса величина принимает то же значение, что и в начале,
- на каждом нечётном шаге этого процесса величина принимает противоположное значение тому, которое было в начале.

Ч | Н Ч Н Ч Н

Н | Ч Н Ч Н Ч

Задача 20

Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 2025 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение:

После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго — на земле, после третьего — на камне, и так далее...

Его положения на камне и на земле чередуются.

Значит, каждый нечётный прыжок кролик делал на камень.

Поэтому после 2025 прыжка он окажется снова на камне.

Задача 21

В сундуке лежит 20 колпаков. 17 гномов по очереди подходят к сундуку, и каждый либо снимает свой колпак и кладёт в сундук, либо берёт из сундука один колпак. Могло ли после ухода всех гномов в сундуке остаться ровно 10 колпаков?

Решение:

Изначально колпаков чётно в сундуке.

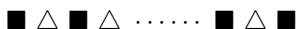
После каждого гнома чётность колпаков меняется.

Значит, после 17 гномов она будет противоположной от изначальной.

Чётность и чередование

Идея 3.

- Нечётное количество предметов двух видов нельзя расположить по кругу так, чтобы они чередовались. (Если попробуем их так расположить по кругу, то первый и последний предмет будут одного вида, и поэтому такой круг не замкнётся, см. рисунок ниже.)



- Если по кругу лежат предметы двух видов чередуясь, то этих предметов обязательно чётное количество и предметов обоих видов поровну.

Задача 22

В плоскости расположено 11 шестерёнок таким образом, что первая сцеплена со второй, вторая — с третьей, ..., одиннадцатая — с первой. Могут ли они вращаться?



Решение:

Посмотрим на вращение шестерёнок.

Соседние две вращаются в разные стороны.

Но их всего нечётное количество.

Задача 23

По кругу написано семь натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

Решение:

Числа бывают двух видов: чётные и нечётные.

Поскольку всего чисел нечётное количество, то чередоваться они не могут.

Значит, есть два соседних одной чётности, а их сумма чётна.