

Графы 2

21 марта 2026

Лемма о рукопожатиях. В любом графе количество вершин нечётной степени чётно.

Теорема о сумме степеней вершин. В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер (и следовательно, чётна).

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно покрасить в два цвета так, что никакие вершины одного цвета не были соединены ребром. Совокупность вершин одного цвета называется *долей*.

Удобно представлять такой граф следующим образом. Расположим все вершины одного цвета слева, а все вершины другого цвета — справа. Тогда каждое ребро будет соединять одну вершину слева с вершиной справа.

Обсуждаются на семинаре

1. Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть (а) 35 игр; (b) 56 игр; (c) 34 игры?
2. В государстве каждый город соединён авиалиниями ровно с пятью другими городами.
 - (a) Нарисуйте схему авиалиний для государства из 10 городов.
 - (b) Сколько авиалиний в государстве из 50 городов?
 - (c) Может ли существовать государство, в котором ровно 46 авиалиний?
3. Каждый из десяти гвардейцев кардинала Ришелье хоть раз вызывал на дуэль кого-нибудь из мушкетеров. Причём первый гвардеец бросал вызов на дуэль ровно один раз, второй гвардеец — ровно два раза, ..., десятый — ровно десять раз. Сколько могло быть мушкетеров, если известно, что каждый из них получал вызов на дуэль ровно пять раз?
- 4.* **Теорема о количестве рёбер в двудольном графе.** Докажите, что в двудольном графе количеству рёбер равно сумме степеней вершин в каждой доле.
5. В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?

Основные задачи

6. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц (улицы соединяют площади). Докажите, что
 - (а) число площадей чётно,
 - (б) число улиц делится на 5.
7. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
8. Существует ли 25-звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно 3 раза?
9. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2026×2026 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?

Письменные задачи

10. Пять человек играли в шахматы (каждый сыграл хотя бы одну игру). Только Петя и Вася сыграли одинаковое число игр, а все остальные — различное. Сколько игр сыграли Петя и Вася?
11. В графе каждая вершина — синяя или красная. При этом каждая вершина соединена с 5 синими и 5 красными. Докажите, что количество вершин делится на 4.