

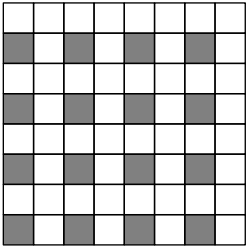
Раскраски 2

Раскраска окошками

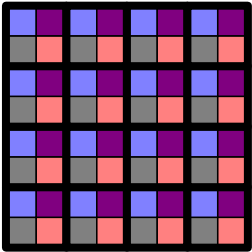
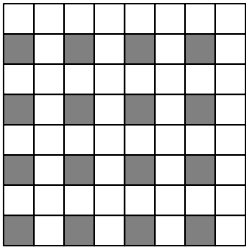
Задача 1

Можно ли некоторые клетки доски 8×8 закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

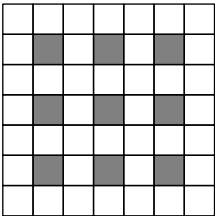
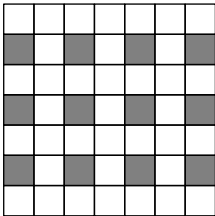
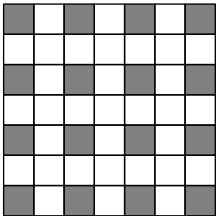
Решение. Можно, пример на рисунке.



Раскраска окошками и блоками



Раскраска окошками на доске 7×7

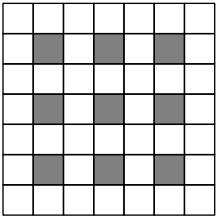


Задача 2

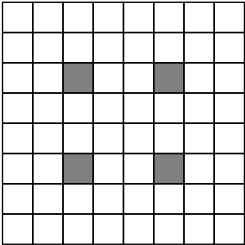
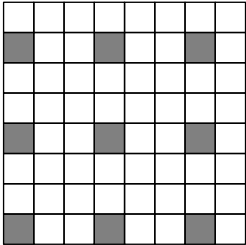
Можно ли из доски 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2 ?

Решение.

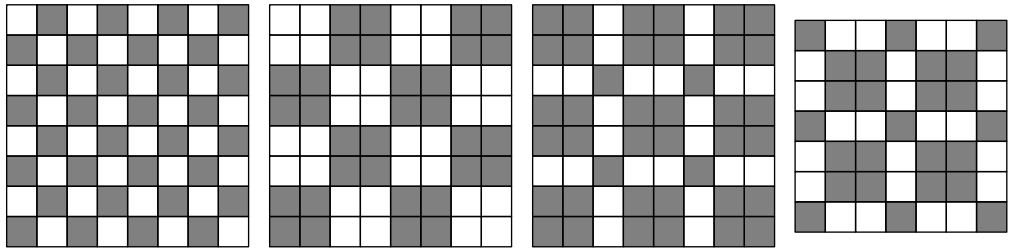
Раскрасим доску окошками как на рисунке. Получим 9 чёрных клеток. Каждый квадрат 2×2 содержит одну из этих клеток. Поэтому квадратов может быть не больше 9.



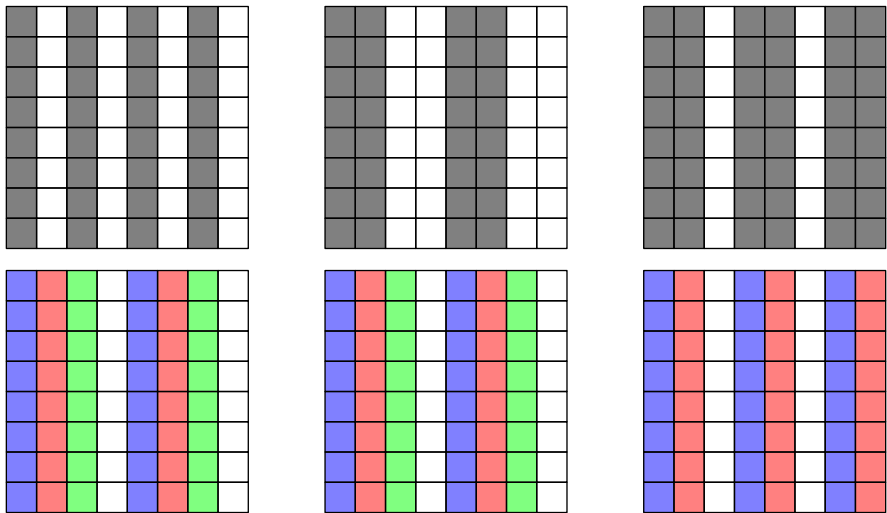
Ещё варианты раскраски окошками



Шахматная раскраска и её укрупнение

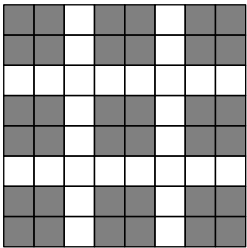
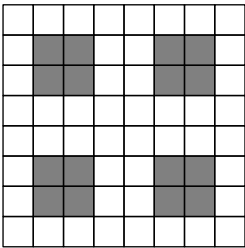
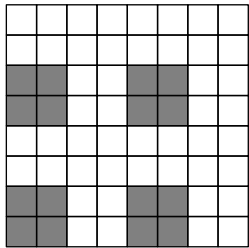


Укрупнения матрасной раскраски, являются частными случаями матрасной раскраски в несколько цветов



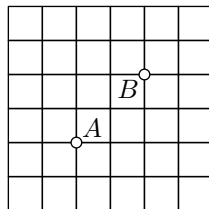
Укрупнения диагональной раскраски, также являются частными случаями диагональной раскраски в несколько цветов

Укрупнённая раскраска окошками



Раскраски. Разбор

1. Турист находится в точке A и может ходить только по линиям сетки. Каждую минуту он переходит из одного пересечения линий в соседнее. Сможет ли он ровно через 33 минуты оказаться в точке B ?



К задаче 2

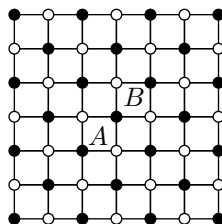
Решение.

Раскрасим узлы в шахматном порядке.

При каждом ходе турист меняет цвет узла, в котором находится.

Происходит чередование цвета узлов при каждом ходе.

Значит, оказаться в узле того же цвета, что и изначально, можно только через чётное количество ходов.

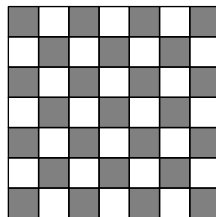


2. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук.
- (а) По команде каждый жук переполз на одну из соседних по стороне клеток. Докажите, что при этом найдется хотя бы одна свободная клетка.
- (б) (Письменно) По команде каждый жук переполз на одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что при этом найдется хотя бы 7 свободных клеток.

Решение.

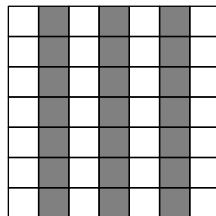
(а) Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 25, а белых 24.

24 жука с белых клеток переползут в 25 чёрных, поэтому хотя бы одна чёрная клетка останется свободной.

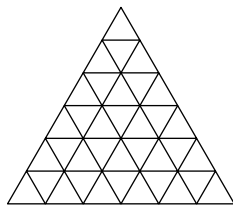


(б) Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 21, а белых 28.

21 жуков с белых клеток переползут в 28 чёрных, поэтому хотя бы 7 чёрных клеток останется свободными.



3. Замок в форме треугольника со стороной 6 разбит на 36 треугольных комнат со стороной 1 (см. рис.). В каждой стене, разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Какое наибольшее число комнат сможет обойти турист, не заходя ни в какую комнату дважды?



К задаче 3

Решение.

Раскрасим треугольники в шахматном порядке как на рисунке.

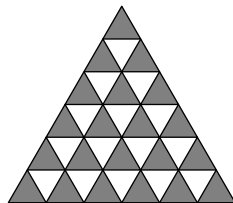
Тогда чёрных треугольников будет 21, а белых 15.

При переходе из одной треугольника (комнаты) в другой меняется его цвет, происходит чередование цвета клеток.

Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.

Значит, турист может обойти не более 15 белых и 16 чёрных комнат.

Пример несложно нарисовать, начав в верхнем треугольнике и спускаясь «змейкой» вниз.



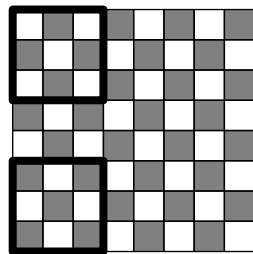
4. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгивать через рядом стоящую фишку и занимать свободную клетку за ней (как в пашках, но перепрыгивать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3 , но в другом углу:
- (а) левом верхнем;
- (б) (Письменно) правом верхнем?

Решение.

(а) Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке.

При каждом ходе каждая фишка оказывается на клетках одного и того же цвета.

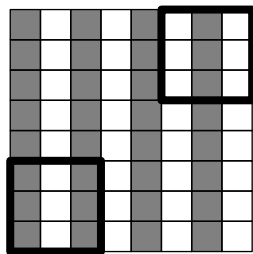
Изначально на чёрных клетках стояли 5 фишек, а в левом верхнем углу только 4 чёрные клетки.



(б) Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке.

При каждом ходе каждая фишка оказывается на клетках одного и того же цвета.

Изначально на чёрных клетках стояли 6 фишек, а в правом верхнем углу только 3 чёрные клетки.

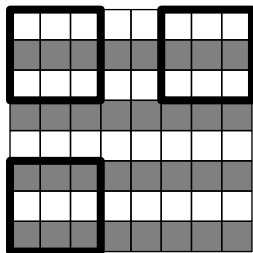


Другое решение.

Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке.

При каждом ходе каждая фишка оказывается на клетках одного и того же цвета.

Изначально на чёрных клетках стояли 6 фишек, а в любом верхнем углу только 3 чёрные клетки.



5. (а) (Письменно) Из доски 7×7 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.
- (б) Из доски 11×11 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.

Решение.

(а) Раскрасим диагональной раскраской в три цвета как на рисунке. Получим 17 синих, 16 белых и 16 красных клеток.

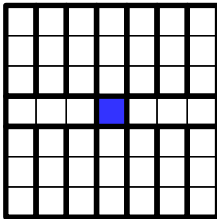
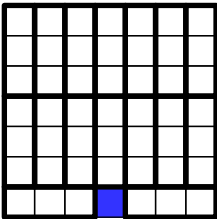
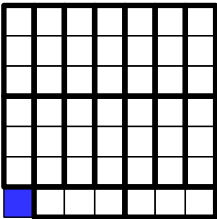
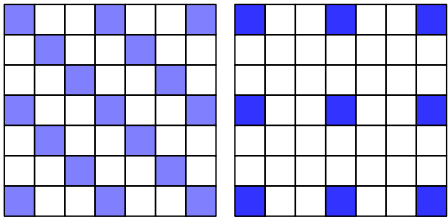
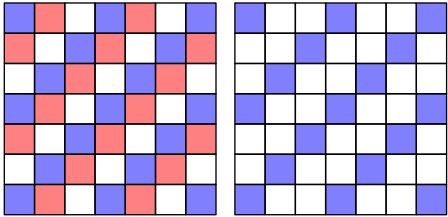
В каждом прямоугольнике 1×3 есть клетки всех трёх цветов.

Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну.

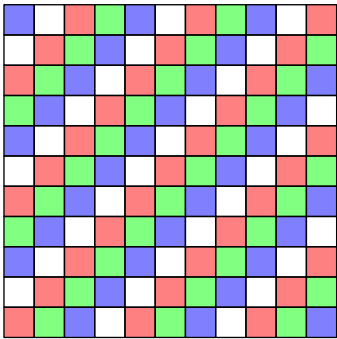
Значит, надо вырезать одну из синих клеток.

Если раскрасим диагональной раскраской в три цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию.

Надо вырезать одну из синих клеток. Примеры как можно вырезать ниже.

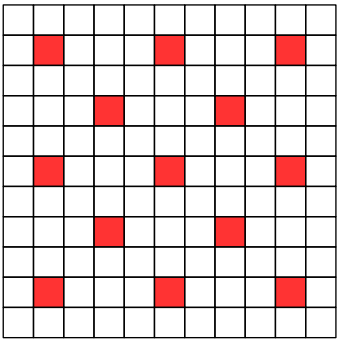
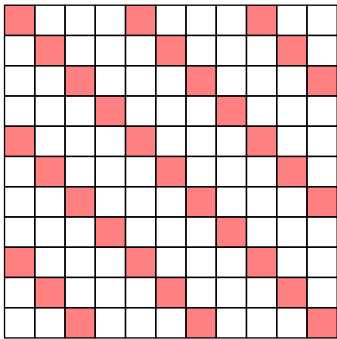
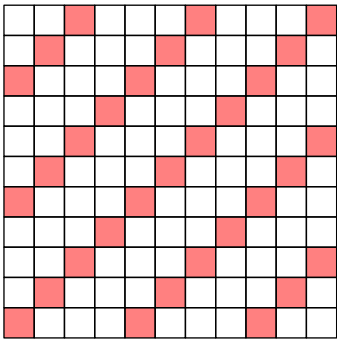


(б) Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета как на рисунке. Получим 30 зелёных, 30 синих, 30 белых и 31 красных клеток. В каждом прямоугольнике 1×4 есть клетки всех четырёх цветов. Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну. Значит, надо вырезать одну из красных клеток.

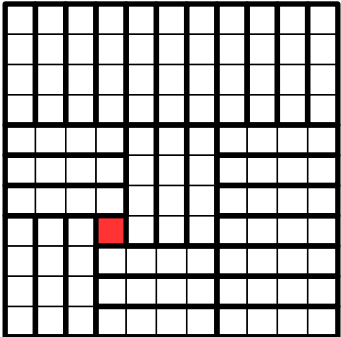
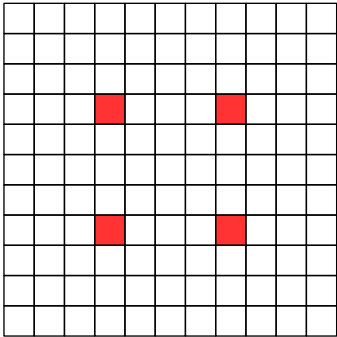
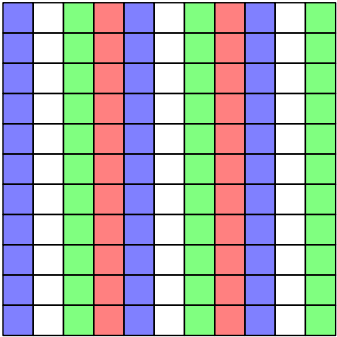


Если раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию.

Надо вырезать одну из красных клеток.



Раскрасим теперь матрасной раскраской в четыре цвета как на рисунке.
Получим 33 зелёных, 33 синих, 33 белых и 22 красных клеток.
В каждом прямоугольнике 1×4 либо есть клетки всех четырёх цветов, либо все клетки одного цвета.
Поэтому, чтобы получилось разрезать, разность между количеством клеток двух разных цветов должна делиться на 4.
Значит, надо вырезать одну из красных клеток.



6. На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают с вершинами куба. Какое наименьшее количество звеньев этой ломаной может совпасть с рёбрами куба?

Решение.

Раскрасим вершины проволочного куба в шахматном порядке (см. рис.).

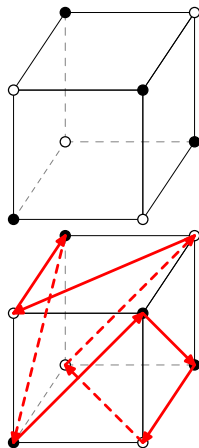
Если звено ломаной не совпадает с ребром куба, то оно проходит по диагонали грани.

Но такие звенья соединяют вершины одного цвета.

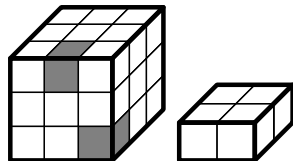
Значит, должно быть хотя бы одно звено, совпадающее с ребром куба.

А поскольку ломаная замкнутая, то таких рёбер хотя бы два.

Пример на рисунке.



7. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, разделенный на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ (см. рис.). В каждом незакрашенном маленьком кубике стоит число 0, а в покрашенном — 1. Разрешается выбрать 4 кубика, у которых есть общее ребро, и в каждом из них к числу прибавить по 1. Можно ли сделать так, чтобы все числа стали равными?



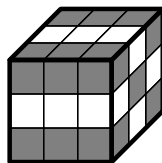
К задаче 5

Решение.

Раскрасим кубики в матрасную раскраску как на рисунке. Заметим, что изначально сумма в чёрных кубиках на 2 больше суммы в белых.

За одну операцию одновременно увеличиваются на 2 как сумма в чёрных кубиках, так и в белых.

Поэтому в чёрных кубиках сумма всегда будет на 2 больше суммы в белых.



8. Квадрат 6×6 клеток покрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник 1×4 и перекрасить все его клетки в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?

Решение.

Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета как на рисунке.

Получим 10 зелёных, 9 синих, 8 белых и 9 красных клеток.

Количества синих и белых покрашенных клеток изначально одной чётности.

Каждым ходом перекрашиваются все клетки в каком-то прямоугольнике 1×4 .

Одна из синих клеток перекрашивается в другой цвет и одна из белых.

Поэтому количества синих и белых покрашенных клеток снова будет одной чётности.

Значит, не получится закрасить 9 синих и 8 белых белую клетку в чёрный цвет.

