

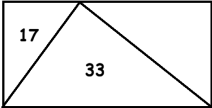
Программа зачёта

Конструктивы с числами

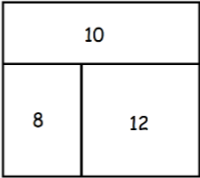
- 1. Миллионер Корейко купил у Остапа Бендера компрометирующую его расписку и получил причитающуюся ему сдачу; при этом использовались купюры только в 63 и 350 тугриков. Какую наименьшую сумму могла стоить расписка?
- 2. На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?
- 3. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких *различных* букв. Например, если спросить « $A + B = ?$ », то в случае, когда $A = 9, B = 1, C = 0$, ответом будет « $A + B = BC$ ». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?

Периметры и площади

- 4. Серёжа разрезал прямоугольник на три треугольника и подписал площади двух из них в квадратных сантиметрах (см. рисунок). Чему равна площадь третьего?
- 5. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.
- 6. Квадрат разбили на три прямоугольника как показано на рисунке. Их периметры равны 8, 10, 12 см. Найдите периметр квадрата.



30		?
21	35	
	10	8

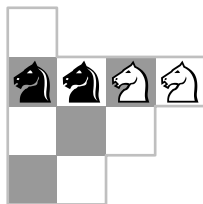


Задачи про клеточки

7. Профессор Дирихле хочет посадить 37 кроликов в клетки квадрата 4×4 так, чтобы в любом уголке из трех клеток было, по крайней мере, 7 кроликов. Получится ли у него это сделать?
8. Докажите, что клетки доски 8×8 нельзя раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 4×4 чёрных клеток было больше, чем белых, а в любом прямоугольнике 3×5 чёрных клеток было меньше, чем белых.
9. Из клетчатой доски 20×20 вырезали 48 прямоугольников из трёх клеток. Докажите, что можно вырезать еще хотя бы один.

Знакомство с графами

10. Докажите, что в любом графе (у которого не менее двух вершин) найдутся две вершины одинаковой степени.
11. Обязательно ли два графа на 8 вершинах изоморфны, если они связны, степень каждой вершины равна 3 и в них нет треугольников? (*Треугольником называется три вершины, попарно соединённые рёбрами.*)
12. На куске шахматной доски расположены два белых и два черных коня. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов белые и чёрные кони поменяться местами?



Графы 2

13. Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остаётся связным.
14. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
15. При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n + 1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

Комбинаторика

16. В классе учатся 15 мальчиков и 13 девочек. В начале учебного года проводятся выборы. Сначала выбирают старосту класса (им может стать любой ученик). Затем староста выбирает себе заместителя из одноклассников того же пола (мальчик – мальчика, девочка – девочку). Сколько различных итогов может быть у этих выборов?
17. *Палиндромом* называется число, которое одинаково записывается слева направо и справа налево. Например, 2020202 или 1357531. Сколько существует семизначных палиндромов?
18. Найдите количество раскрасок клеток квадрата 3×3 в 5 цветов, при которых во всех строках, столбцах и двух главных диагоналях цвета клеток не повторяются (квадрат фиксирован, не поворачивается и не переворачивается).

Комбинаторика 2

19. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?
20. Придумайте комбинаторную задачу («Посчитайте количество способов ...»), в которой, с одной стороны, ответ можно было бы посчитать как $10+9+\dots+1$, а с другой стороны как $\frac{11 \cdot 10}{2}$, тем самым, после обобщения, комбинаторно доказав формулу:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

21. Найдите количество способов расставить 8 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей.

Подсчёт двумя способами

22. Девочки и мальчики играли в снежки. Каждая девочка запустила 12 снежков, а каждый мальчик — 19 снежков. В итоге оказалось, что в каждую девочку прилетело по 15 снежков, а в каждого мальчика — по 17 снежков (каждый снежок попал в цель). Кого было больше, мальчиков или девочек?
23. Имеется много одинаковых треугольников. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 2, 3, 4. Треугольники сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из трех углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2026?
24. Барон Мюнхгаузен рассказывает, что однажды увидел, как некий математик расставил в вершинах куба натуральные числа от 1 до 8, а когда посчитал для каждого ребра сумму чисел в вершинах, которые соединяет это ребро, то получились 12 разных сумм. Не выдумывает ли барон?

Принцип узких мест

25. В цирке 10 силачей вынесли на арену на руках по циркачке, каждая легче того, кто её нёс. Потом эти циркачки унесли с арены каждая по силачу. Могло ли случиться что каждая циркачка несла силача легче себя?
26. Можно ли разрезать правильный 6-угольник на 12 треугольников так, чтобы каждый треугольник имел общий отрезок границы ровно с 3 другими треугольниками?
27. Квадрат 10×10 сложен из домино 1×2 . Может ли в нем не быть квадратов 2×2 , составленных из двух доминошек?

Принцип крайнего и упорядочивание

28. По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не меньше одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.
29. На военном полигоне сидит 2025 снайперов. Каждый снайпер целится в ближайшего к нему снайпера (все расстояния между снайперами различны). Докажите, что в одного из снайперов никто не целится.
30. На доске написаны 5 натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трех из них делится на каждое из остальных. Докажите, что среди этих чисел найдутся четыре равных.

Делимость

31. Нескольким зверюшкам раздали 210 долек апельсина. Выяснилось, что зайчику досталось меньше всех долек, и остальные зверюшки передали по одной своей дольке зайчику. После этого у всех зверей стало ровно по x долек. Найдите максимально и минимально возможное значение x .
32. Числа от 1 до 10 раскрашены в два цвета. Оказалось, что произведение всех синих чисел в целое число раз больше, чем произведение красных. Какое наименьшее возможное частное от деления произведение всех синих чисел на произведение всех красных чисел?
33. Существует ли решение у ребуса $ОСЫ \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = **000000$? (Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые, а звёздочками — любые.)

Десятичная запись числа

34. Решите ребус $AB - BA = A$.
35. Найдите все натуральные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.
36. Из четырёх цифр, отличных от нуля, составлены два четырёхзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?

Разделяй и властвуй

37. На доску 10×10 расставили фишки так, что в каждом квадрате 3×3 есть не более 1 фишки.
38. По кругу расставили числа от 1 до 9. Докажите, что найдутся три подряд идущих числа, сумма которых меньше 15.
39. Фигура Пыжик бьёт через одну или через две клетки в любом направлении. Какое наибольшее количество Пыжиков можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Признаки делимости

40. Число $\overline{54XY2}$ делится на 36. Найти его цифры X и Y .
41. На доске записано произвольное 2026-значное число, кратное 9. Обозначим через A сумму цифр этого числа. Обозначим через B сумму цифр числа A . Обозначим через C сумму цифр числа B . Найдите число C .
42. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?