

Делимость

7 марта 2026

Обсуждаются на семинаре

1. Вчера Никита купил несколько ручек: чёрные — по 9 рублей за штуку и синие — по 4 рубля за штуку. Зайдя сегодня в тот же магазин, он обнаружил, что цены на ручки изменились: чёрные стали стоить 4 рубля за штуку, а синие — 9 рублей. Увидев такое, Никита сказал с досадой: «Покупай я те же ручки сегодня, сэкономил бы 49 рублей». Не ошибается ли он?
2. Существует ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три на 6, $\dots$, ровно семь на 2?
3. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что любое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)
4. Существует ли решение у ребуса:
(а) $ОСЫ \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = ***0\,000$;
(б) $ОСЫ \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = ***00\,000$;
(в) $ОС* \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = **\,000\,000$?
(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые, а звёздочками — любые.)

Основные задачи

5. Можно ли в таблицу 4×4 расставить все натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце делилось бы на 16.
6. Несколько зверюшкам раздали 210 долек апельсина. Выяснилось, что зайчику досталось меньше всех долек, и остальные зверюшки передали по одной своей дольке зайчику. После этого у всех зверей стало ровно по x долек. Найдите максимально и минимально возможное значение x .
7. Сеня и Женя покупают в столовой чай, пирожки и бутерброды. За неделю Сеня выпил 5 стаканов чая, съел 4 пирожка и 3 бутерброда, а Женя выпил 4 стакана чая, съел 1 пирожок и 9 бутербродов. Стакан чая, пирожок и бутерброд стоят целое число рублей. Известно, что Сеня потратил сумму, кратную 11. Докажите, что Женя также потратил сумму, кратную 11.

8. Маша хочет придумать такие одиннадцать последовательных натуральных чисел, что к каждому из них можно либо прибавить единицу, либо вычесть единицу так, что полученные одиннадцать чисел будут иметь такое же произведение как и произведение изначальных одиннадцати чисел. Сможет ли Маша придумать такие числа?
9. Натуральные числа от 1 до 37 выписали в ряд: первым выписали число 37, вторым — 1, а каждое следующее число выписывали так, чтобы сумма всех предыдущих чисел делилась на это число. Какое число выписали третьим?

Письменные задачи

10. Найдите наименьшее простое число, которое можно получить, сложив пять различных простых чисел.
11. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 19 раз больше другого?
12. Числа от 1 до 10 раскрашены в два цвета. Оказалось, что произведение всех синих чисел в целое число раз больше, чем произведение красных. Какое наименьшее возможное частное от деления произведения всех синих чисел на произведение всех красных чисел?