

Графы 2

28 марта 2026

Лемма о рукопожатиях. В любом графе количество вершин нечётной степени чётно.

Теорема о сумме степеней вершин. В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер (и следовательно, чётна).

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно покрасить в два цвета так, что никакие вершины одного цвета не были соединены ребром. Совокупность вершин одного цвета называется *долей*.

Удобно представлять такой граф следующим образом. Расположим все вершины одного цвета слева, а все вершины другого цвета — справа. Тогда каждое ребро будет соединять одну вершину слева с вершиной справа.

Теорема о количестве рёбер в двудольном графе. В любом двудольном графе количеству рёбер равно сумме степеней вершин в каждой доле.

Обсуждаются на семинаре

1. В государстве каждый город соединён авиалиниями ровно с пятью другими городами.
 - (a) Нарисуйте схему авиалиний для государства из 10 городов.
 - (b) Сколько авиалиний в государстве из 50 городов?
 - (c) Может ли существовать государство, в котором ровно 46 авиалиний?
2. В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?
3.
 - (a) Может ли случиться, что в компании из 10 девочек и 9 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?
 - (b) А если девочек 11, а мальчиков 10?
 - (c) При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n + 1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

Основные задачи

4. Любой из 102 учеников математического кружка знаком хотя бы с 68 другими. Докажите, что найдутся четыре человека, имеющие одинаковое число знакомых.
5. Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остаётся связным.

6. Существует ли 25-звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно 3 раза?
7. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2026×2026 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
8. 8 школьников решало 8 задач. Известно, что каждую задачу решило ровно 5 школьников и все школьники решили одинаковое количество задач. Доказать, что есть 2 школьника, что каждая задача была решена хотя бы одним из них.

Письменные задачи

9. В графе каждая вершина — синяя или красная. При этом каждая вершина соединена с 5 синими и 5 красными. Докажите, что количество вершин делится на 4.
10. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?