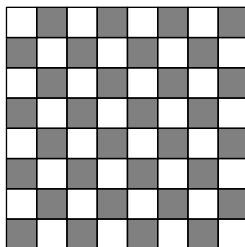


Раскраски

Шахматная раскраска



Задача 1

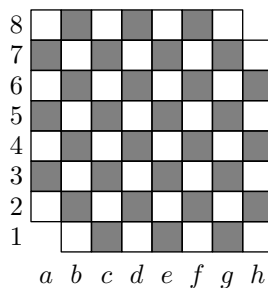
Из шахматной доски вырезали две клетки $a1$ и $h8$. Можно ли то, что осталось, разрезать на доминошки (доминошки — это прямоугольники размером 1×2)?

Решение.

Обе вырезанные клетки чёрные (см. рис.).

Поэтому осталось 32 белые и 30 чёрных клеток.

А в каждой доминошке должна быть одна клетка белая и одна чёрная.



Задача 2

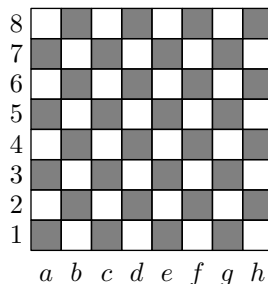
Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное количество ходов.

Решение.

При каждом ходе конь меняет цвет клетки, на которой стоит: с белой на чёрную и с чёрной на белую.

Происходит чередование цвета клеток при каждом ходе.

Значит, оказаться на клетке того же цвета, что и изначально, можно только через чётное количество ходов.



Задача 3

Шахматный конь долго и упорно изучал магию, в результате чего освоил-таки заклинание «Телепорт», которое после каждого хода мгновенно перемещает его в клетку, симметричную данной относительно вертикальной оси симметрии шахматной доски (например, из левого верхнего угла — в правый верхний). Сможет ли он добраться из левого нижнего угла хотя бы в одну из соседних по стороне клеток?

Решение.

При каждом ходе обычный шахматный конь меняет цвет клетки, на которой стоит: с белой на чёрную и с чёрной на белую.

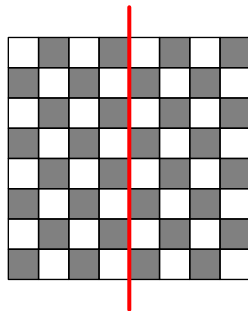
При «телепортации» также происходит смена цвета клетки: с чёрного на белый и с белого на чёрный.

Значит, за ход конь дважды поменял цвет клетки и вновь оказался на клетке того же цвета, с которого начинал ходить.

Поэтому, конь всегда оказывается на клетках одного и того же цвета.

Но левая нижняя клетка чёрного цвета, а клетки, соседние с ней по стороне — белого.

Поэтому конь не сможет добраться ни в одну из них.



Задача 4

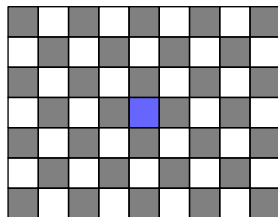
Замок имеет вид прямоугольника размером 7×9 клеток. Каждая клетка, кроме центральной — комната замка, а в центральной клетке находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Решение.

Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 32, а белых 30.

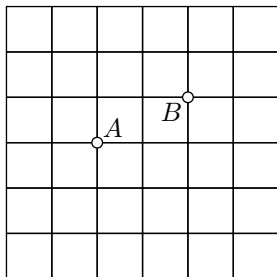
При переходе из одной клетки (комнаты) в другую меняется её цвет, происходит чередование цвета клеток.

Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.



Задача 5

Турист находится в точке A и хочет прогуляться до точки B (см. рис.). Он может ходить только по линиям сетки и хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться в одном и том же месте ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



Решение.

Длина маршрута будет на 1 меньше количество посещённых узлов, потому что узлы и единичные отрезки вдоль маршрута чередуются, а начало и конец в узлах.

Всего узлов 49, но все их посетить не получится.

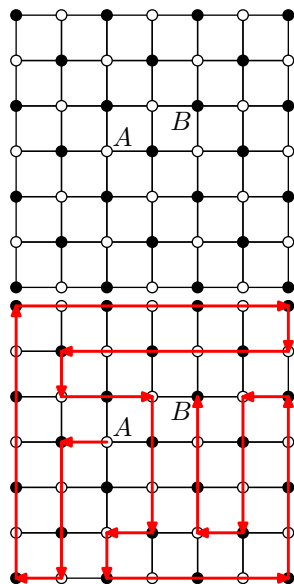
Раскрасим узлы в шахматном порядке.

Начинаем в белом узле, а заканчиваем в чёрном, при этом чередуя цвета узлов вдоль маршрута.

Значит, получится посетить лишь чётное количество узлов, то есть не более 48.

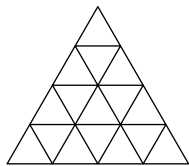
Пример как побывать в 48 узлов указан на рисунке.

Длина маршрута в этом случае составит 47 единичных отрезков.



Задача 6

Треугольник со стороной 4 разделили на 16 треугольников со стороной 1 (см. рис.). Можно ли большой треугольник разрезать по линиям сетки на 8 ромбиков (каждый ромбик состоит из двух треугольников со стороной 1)?

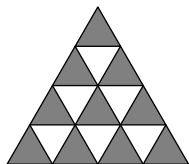


Решение.

Раскрасим маленькие треугольники в шахматном порядке (см. рис.).

Получилось 6 белых и 10 чёрных треугольников.

А в каждом ромбике должен быть один белый треугольник и один чёрный.



Задача 7

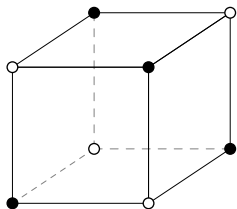
Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

Решение.

Раскрасим вершины проволочного куба в шахматном порядке (см. рис.).

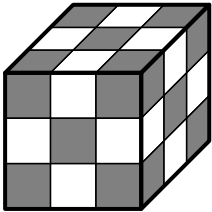
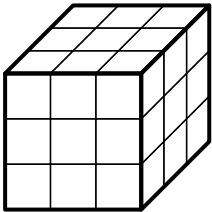
При переползании из одной вершины в соседнюю меняется цвет, происходит чередование цветов вершин.

Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.



Задача 8

Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?



Решение.

Раскрасим маленькие кубики в шахматном порядке (см. рис.). Тогда чёрных кубиков будет 14, а белых 12. При последовательном съедании мышью одного кубика за другим меняется его цвет, происходит чередование цвета кубиков. Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.

Задача 9

Можно ли расставить 16 чисел: 5, 15, 25, 35 и т.д. (каждое следующее на 10 больше предыдущего) в таблице 4×4 так, чтобы разность каждых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, не делилась на 4?

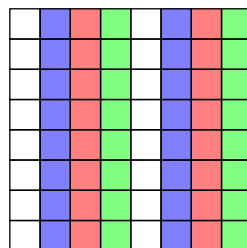
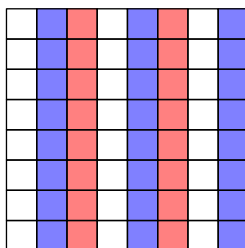
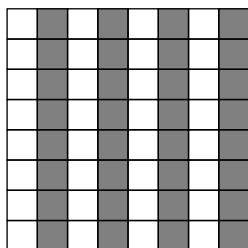
Решение.

Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке (см. рис.). Два числа с разностью 20, 40, 60, ..., рядом ставить нельзя, поставим все такие числа в белые клетки, а все остальные — в чёрные. Пример готов.

5		25	
	45		65
85		105	
	125		145

5	15	25	35
55	45	75	65
85	95	105	115
135	125	155	145

Матрасная раскраска



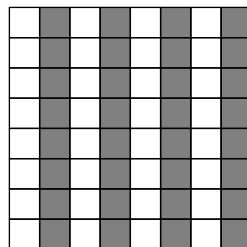
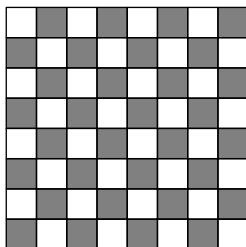
Задача 10

На шахматной доске стоит фигура «верблюд», которая каждым ходом сдвигается на три клетки по вертикали и одну клетку по горизонтали, или на три по горизонтали и одну по вертикали. Может ли «верблюд», сделав несколько ходов, попасть в клетку, соседнюю с исходной по стороне?

Решение.

Матрасная раскраска не поможет решить эту задачу, зато шахматная помогает.

При каждом ходе «верблюд» оказывается на клетках одного и того же цвета (в шахматной раскраске).



Но левая нижняя клетка чёрного цвета, а клетки, соседние с ней по стороне — белого.

Поэтому «верблюд» не сможет добраться ни в одну из них.

Задача 11

На шахматной доске стоит фигура «верблюд», которая каждым ходом сдвигается на три клетки по вертикали и одну клетку по горизонтали, или на три по горизонтали и одну по вертикали. «Верблюд» вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Решение.

А здесь, наоборот, шахматная раскраска не поможет, но матрасная помогает.

При каждом ходе «верблюд» меняет цвет клетки, на которой стоит: с белой на чёрную и с чёрной на белую (в матрасной раскраске).

Происходит чередование цвета клеток при каждом ходе.

Значит, оказаться на клетке того же цвета, что и изначально но, можно только через чётное количество ходов.

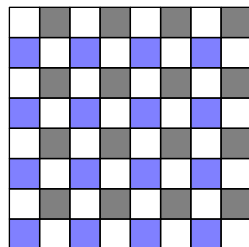
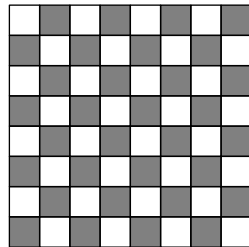
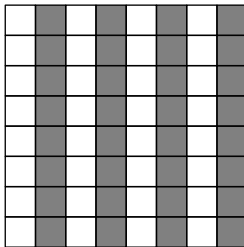
Второй способ. Можно раскрасить чёрные клетки шахматной раскраски в шахматном порядке в черный и синий цвета (см. рис.)

А здесь, наоборот, шахматная раскраска не поможет, но матрасная помогает.

При каждом ходе «верблюд» меняет цвет клетки, на которой стоит: с синей на чёрную и с чёрной на синюю.

Происходит чередование цвета клеток при каждом ходе.

Значит, оказаться на клетке того же цвета, что и изначально но, можно только через чётное количество ходов.



Задача 12

В клетках таблицы 4×4 расставлены числа (рис. слева). Разрешается к числам в четырех клетках, которые образуют Z -тетрамино (см. рис.), одновременно прибавлять или отнимать одно и то же число. Можно ли в какой-то момент получить такую таблицу с числами, как на рисунке справа?



2	2	2	2
3	3	3	2
2	1	3	1
3	2	3	2

1	2	1	1
1	2	1	1
1	2	1	1
1	2	1	1

Решение.

Раскрасим столбцы таблиц матрасной раскраской (см. рис.).

Для левой таблицы сумма чисел в чёрных клетках равна 21, а сумма в белых — 15.

Для правой таблицы сумма чисел в чёрных клетках равна 12, а сумма в белых — 8.

Если к числам в четырех клетках, которые образуют Z -тетрамино, левой таблицы одновременно прибавлять или отнимать одно и то же число, то сумма чисел в чёрных клетках будет оставаться больше суммы чисел в белых клетках на 5.

Поэтому правая таблица не может получиться.

Если бы мы использовали шахматную раскраску, то ничего бы не получилось.

При шахматной раскраске в обеих таблицах суммы чисел в чёрных и белых клетках одинаковы.

2	2	2	2
3	3	3	2
2	1	3	1
3	2	3	2

1	2	1	1
1	2	1	1
1	2	1	1
1	2	1	1

Задача 13

Можно ли разрезать квадрат 8×8 на 17 вертикальных и 15 горизонтальных доминошек?

Решение.

В каждой вертикальной доминошке либо 0, либо 2 чёрные клетки (чётное количество).

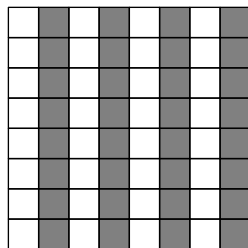
В каждой горизонтальной доминошке ровно 1 чёрная клетка (нечётное количество).

Посчитаем чётность чёрных клеток во всех доминошках.

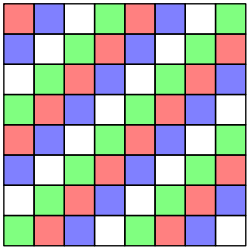
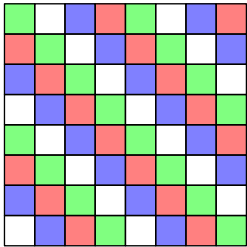
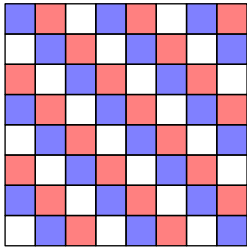
Во всех вертикальных будет чётное количество, так как в каждой доминошке будет чётное количество.

А во всех горизонтальных будет 15 клеток — нечётное количество.

Всего чёрных клеток получается нечётное количество, а должно быть равно 32 — чётному числу.



Диагональная раскраска



Задача 14

Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно вырезать из квадрата 6×6 ?

Решение.

Задача на оценку + пример.

Оценка.

Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета (см. рис.).

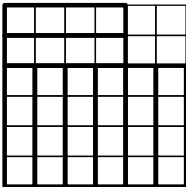
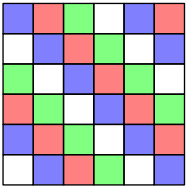
Получим 10 синих, 9 белых, 9 красных и 8 зелёных клеток.

В каждом прямоугольнике 1×4 есть клетки всех четырёх цветов.

Поскольку зелёных клеток всего 8, то вырезать можно не более

8 прямоугольников 1×4 .

Пример для 8 на рисунке.



Задача 15

Какое наименьшее число выстрелов в игре «Морской бой» на доске 7×7 нужно сделать, чтобы наверняка ранить четырёхпалубный корабль (четырёхпалубный корабль состоит из четырёх клеток, расположенных в один ряд)?

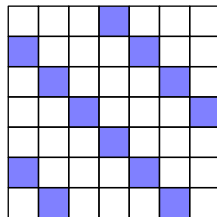
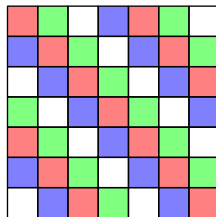
Решение.

Задача на оценку + пример.

Пример.

Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета (см. рис.).

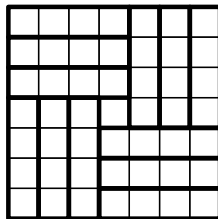
Получим 12 синих, 12 белых, 13 красных и 12 зелёных клеток.



В каждом прямоугольнике 1×4 есть клетки всех четырёх цветов.

Поскольку синих клеток всего 12, то если выстрелить во всех них, то четырёхпалубный корабль точно подобьём.

Оценка. Если было сделано меньше 12 выстрелов, то один из 12 прямоугольников на рисунке окажется не поражен, а на его месте может быть четырёхпалубный корабль.



Задача 16

Можно ли разбить квадрат 8×8 с отрезанным уголком на прямоугольники 1×3 ?

Решение.

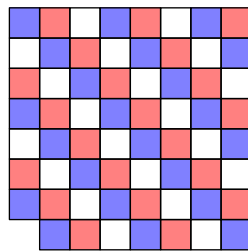
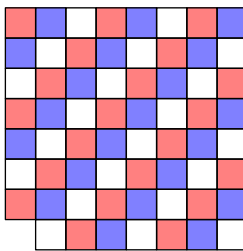
Сделаем диагональную раскраску в три цвета.

В каждом прямоугольнике 1×3 есть клетки всех трёх цветов.

Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну.

Если сделаем раскраску как на левом рисунке, то получим, что всех цветов поровну и противоречия не возникнет.

Если сделаем раскраску как на правом рисунке, то получим 22 синих, 20 белых и 21 красных клеток — противоречие.



Задача 17

(а) Из доски 5×5 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.

(б) Из доски 8×8 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.

Решение.

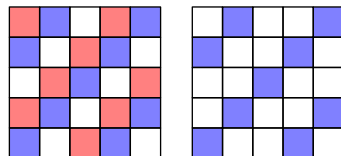
(а) Раскрасим диагональной раскраской в три цвета (см. рис.).

Получим 9 синих, 8 белых и 8 красных клеток.

В каждом прямоугольнике 1×3 есть клетки всех четырёх цветов.

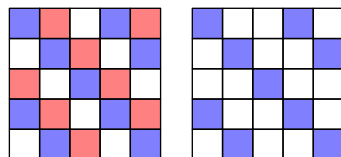
Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну.

Значит, надо вырезать одну из синих клеток.



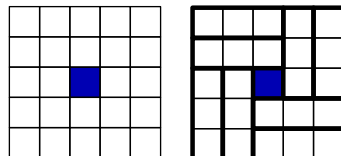
Если раскрасим диагональной раскраской в три цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию.

Надо вырезать одну из синих клеток.



Получается, что вырезать можно только центральную клетку.

Пример такого разрезания на рисунке справа.

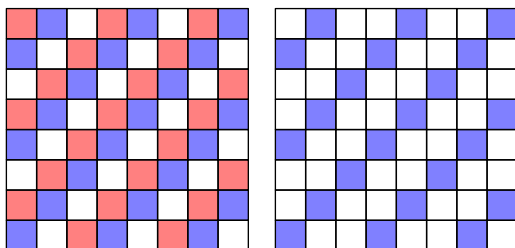


(б) Аналогично.

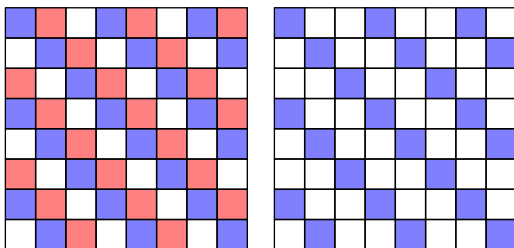
Раскрасим диагональной раскраской в три цвета (см. рис.).

Получим 22 синих, 21 белых и 21 красных клеток.

Значит, надо вырезать одну из синих клеток.

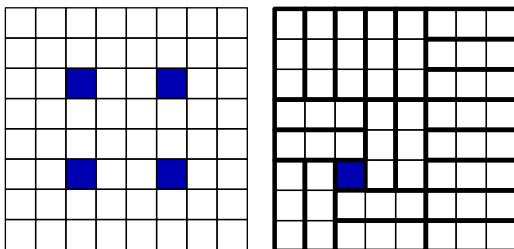


Красим в другом направлении (см. рис.), снова надо вырезать одну из синих клеток.



Получается, что вырезать можно только четыре клетки на рисунке слева.

Пример такого разрезания для одной из клеток приведён на рисунке справа. Для остальных клеток аналогично (можно получить, поворачивая доску).



Задача 18

Квадрат 8×8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник 1×3 и перекрасить все их в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?

Решение.

Раскрасим диагональной раскраской в три цвета (см. рис.). Получим 22 синих, 21 белых и 21 красных клеток.

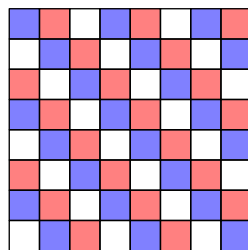
Количества синих и белых незакрашенных клеток изначально разной чётности.

Каждым ходом перекрашиваются все клетки в каком-то прямоугольнике 1×3 .

Одна из синих клеток перекрашивается в другой цвет и одна из белых.

Поэтому количества синих и белых незакрашенных клеток снова будет разной чётности.

Значит, не получится закрасить 22 синих и 21 белую клетку в чёрный цвет.



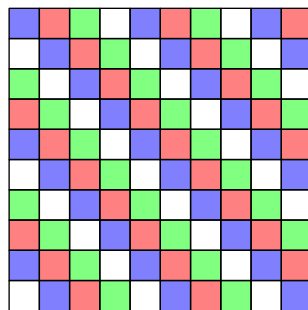
Задача 19

Докажите, что доску размером 10×10 нельзя разрезать на прямоугольники 1×4

Решение.

Нужно воспользоваться диагональной раскраской в 4 цвета (см. рис.), посчитать каждый цвет и сделать аналогично тому, как было сделано ранее.

Дорешайте эту задачу самостоятельно.



Задача 20

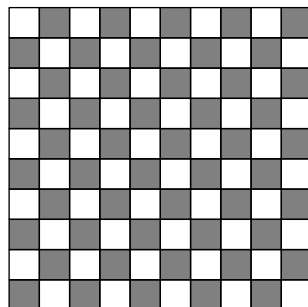
Докажите, что доску размером 10×10 нельзя разрезать на T -тетрамино (см. рис.).



Решение.

Нужно воспользоваться шахматной раскраской (см. рис.), посчитать сколько чёрных клеток может быть в каждом уголке и воспользоваться чётностью (аналогично задаче про вертикальные и горизонтальные доминошки).

Дорешайте эту задачу самостоятельно.



Задача 21

Докажите, что доску размером 10×10 нельзя разрезать на L -тетрамино (см. рис.).



Решение.

Нужно воспользоваться матрасной раскраской (см. рис.) и сделать как в прошлой задаче.

Дорешайте эту задачу самостоятельно.

