

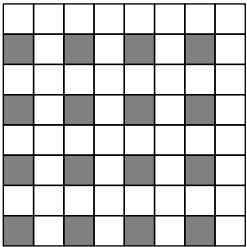
Раскраски 2

Раскраска окошками

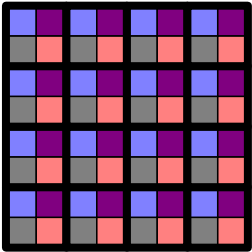
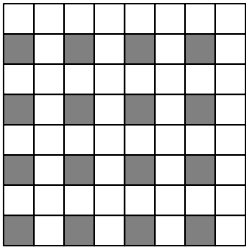
Задача 1

Можно ли некоторые клетки доски 8×8 закрасить в чёрный цвет так, чтобы в каждом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

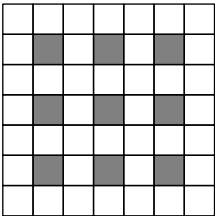
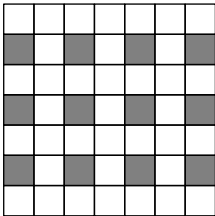
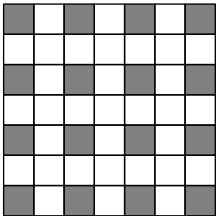
Решение. Можно, пример на рисунке.



Раскраска окошками и блоками



Раскраска окошками на доске 7×7

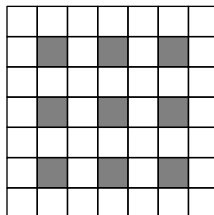


Задача 2

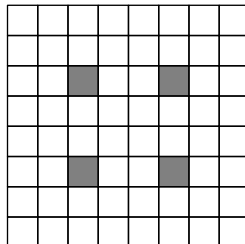
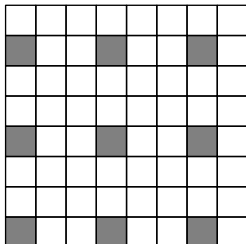
Можно ли из доски 7×7 вырезать 10 квадратов 2×2 ?

Решение.

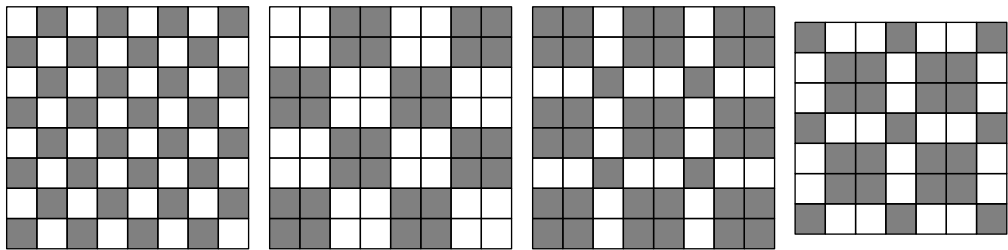
Раскрасим доску окошками как на рисунке. Получим 9 чёрных клеток. Каждый квадрат 2×2 содержит одну из этих клеток. Поэтому квадратов может быть не больше 9.



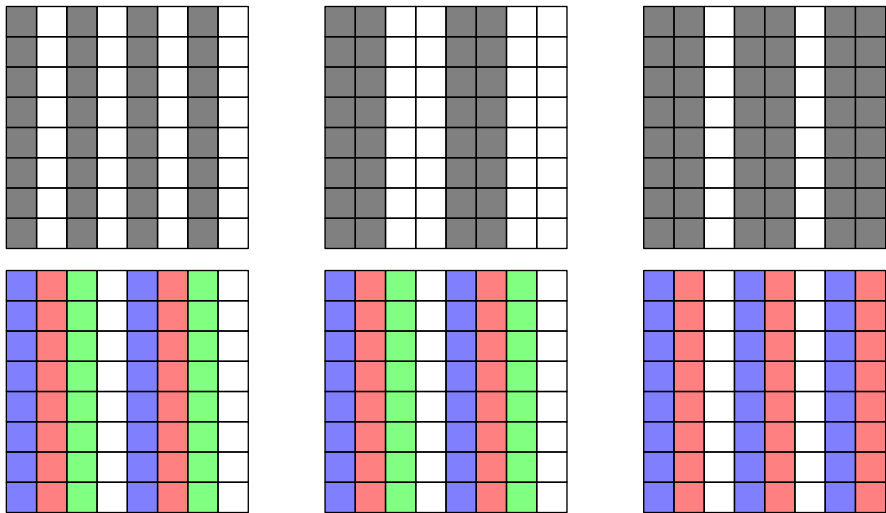
Ещё варианты раскраски окошками



Шахматная раскраска и её укрупнение

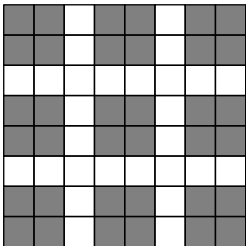
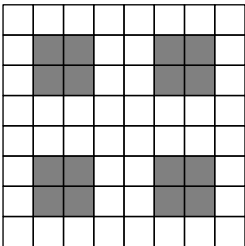
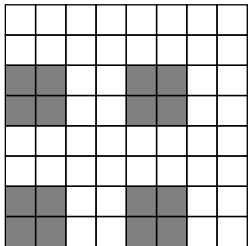


Укрупнения матрасной раскраски, являются частными случаями матрасной раскраски в несколько цветов



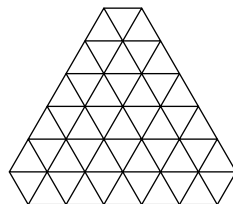
Укрупнения диагональной раскраски, также являются частными случаями диагональной раскраски в несколько цветов

Укрупнённая раскраска окошками



Раскраски. Разбор

1. Можно ли разрезать по линиям шестиугольный торт (см. рис.) на 23 равных куска?



К задаче 1

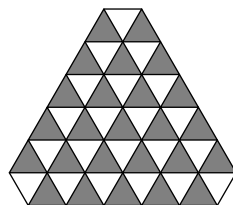
Решение.

Всего 46 треугольников, значит, в каждом куске будет по 2 треугольника.

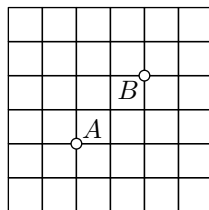
Раскрасим маленькие треугольники в шахматном порядке (см. рис.).

Получилось 21 белых и 25 чёрных треугольников.

А в каждом куске должен быть один белый треугольник и один чёрный.



2. Турист находится в точке A и может ходить только по линиям сетки. Каждую минуту он переходит из одного пересечения линий в соседнее. Сможет ли он ровно через 33 минуты оказаться в точке B ?



К задаче 2

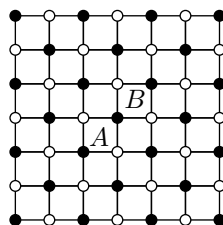
Решение.

Раскрасим узлы в шахматном порядке.

При каждом ходе турист меняет цвет узла, в котором находится.

Происходит чередование цвета узлов при каждом ходе.

Значит, оказаться в узле того же цвета, что и изначально, можно только через чётное количество ходов.



3. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук.

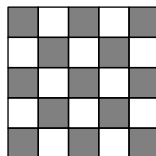
(а) (Письменно) По команде каждый жук переполз на одну из соседних по стороне клеток. Докажите, что при этом найдется хотя бы одна свободная клетка.

(б) По команде каждый жук переполз на одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что при этом найдется хотя бы 5 свободных клеток.

Решение.

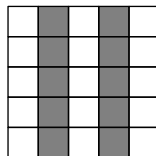
(а) Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 13, а белых 12.

12 жуков с белых клеток переползут в 13 чёрных, поэтому хотя бы одна чёрная клетка останется свободной.



(б) Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 10, а белых 15.

10 жуков с белых клеток переползут в 15 чёрных, поэтому хотя бы 5 чёрных клеток останется свободными.



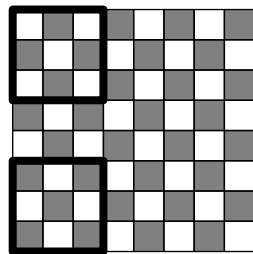
4. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгивать через рядом стоящую фишку и занимать свободную клетку за ней (как в пашках, но перепрыгивать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3 , но в другом углу:
- (а) левом верхнем;
- (б) (Письменно) правом верхнем?

Решение.

(а) Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке.

При каждом ходе каждая фишка оказывается на клетках одного и того же цвета.

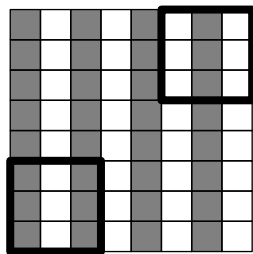
Изначально на чёрных клетках стояли 5 фишек, а в левом верхнем углу только 4 чёрные клетки.



(б) Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке.

При каждом ходе каждая фишка оказывается на клетках одного и того же цвета.

Изначально на чёрных клетках стояли 6 фишек, а в правом верхнем углу только 3 чёрные клетки.

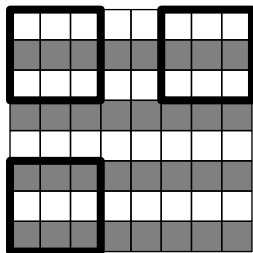


Другое решение.

Раскрасим доску в матрасную раскраску как на рисунке.

При каждом ходе каждая фишка оказывается на клетках одного и того же цвета.

Изначально на чёрных клетках стояли 6 фишек, а в любом верхнем углу только 3 чёрные клетки.



5. (а) (Письменно) Из доски 7×7 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.
- (б) Из доски 11×11 вырезали одну клетку так, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4 . Укажите все клетки, которые могут быть вырезаны и докажите, что других нет.

Решение.

(а) Раскрасим диагональной раскраской в три цвета как на рисунке. Получим 17 синих, 16 белых и 16 красных клеток.

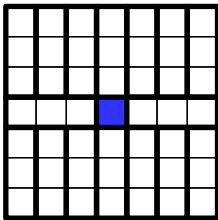
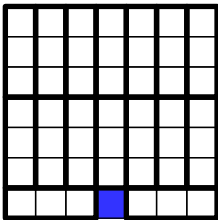
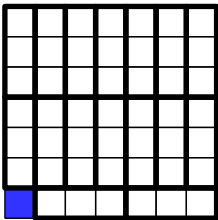
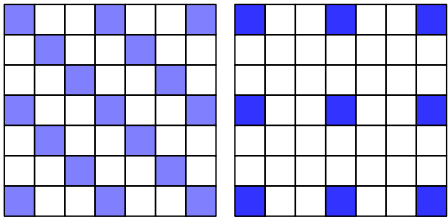
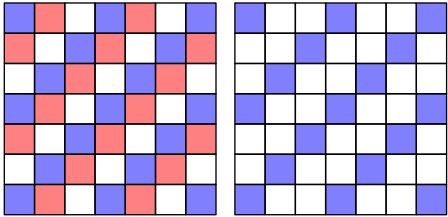
В каждом прямоугольнике 1×3 есть клетки всех трёх цветов.

Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну.

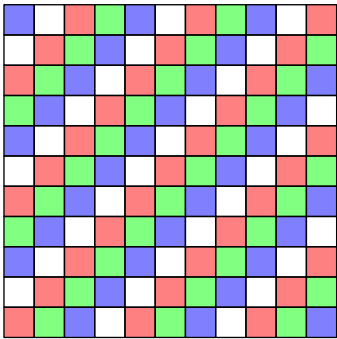
Значит, надо вырезать одну из синих клеток.

Если раскрасим диагональной раскраской в три цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию.

Надо вырезать одну из синих клеток. Примеры как можно вырезать ниже.

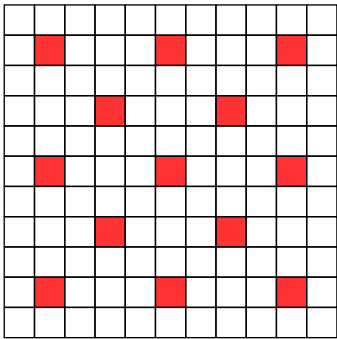
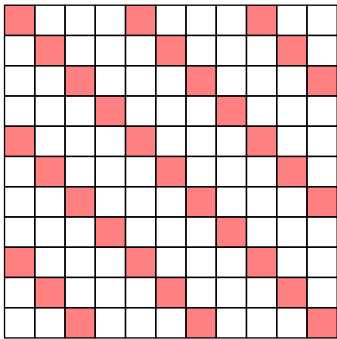
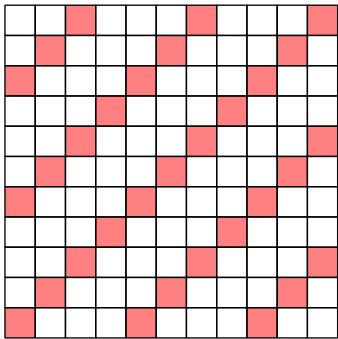


(б) Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета как на рисунке. Получим 30 зелёных, 30 синих, 30 белых и 31 красных клеток. В каждом прямоугольнике 1×4 есть клетки всех четырёх цветов. Поэтому, чтобы получилось разрезать, клеток всех цветов должно быть поровну. Значит, надо вырезать одну из красных клеток.



Если раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета в другом направлении (см. рис.), то получим такую же ситуацию.

Надо вырезать одну из красных клеток.



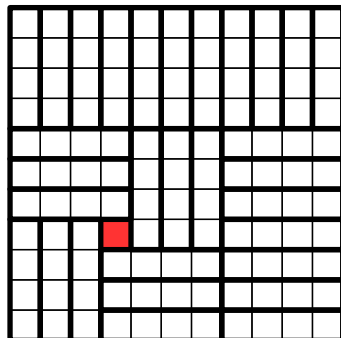
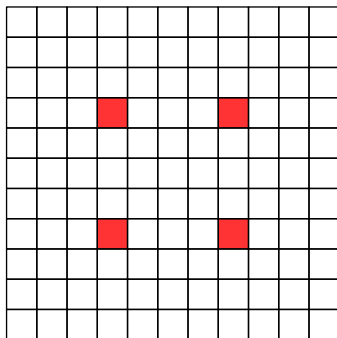
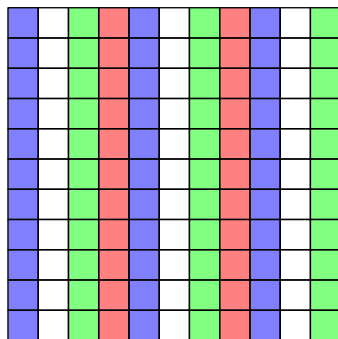
Раскрасим теперь матрасной раскраской в четыре цвета как на рисунке.

Получим 33 зелёных, 33 синих, 33 белых и 22 красных клеток.

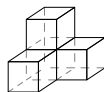
В каждом прямоугольнике 1×4 либо есть клетки всех четырёх цветов, либо все клетки одного цвета.

Поэтому, чтобы получилось разрезать, разность между количеством клеток двух разных цветов должна делиться на 4.

Значит, надо вырезать одну из красных клеток.



6. Можно ли сложить прямоугольный параллелепипед $11 \times 12 \times 13$ из уголков, составленных из четырёх кубиков (см. рис.)?



Решение.

Если прямоугольный параллелепипед $11 \times 12 \times 13$ можно разрезать на уголки, составленные из четырёх кубиков, то таких уголков будет $11 \cdot 12 \cdot 13 : 4 = 11 \cdot 3 \cdot 13$ — нечётное количество.

Раскрасим кубики шахматной раскраской.

Тогда чёрных и белых кубиков будет $11 \cdot 12 \cdot 13 : 2 = 11 \cdot 6 \cdot 13$ — чётное количество.

В каждом уголке нечётное количество чёрных кубиков (либо 1, либо 3).

Следовательно, в $11 \cdot 3 \cdot 13$ уголках будет нечётное количество чёрных кубиков.

Противоречие.

7. Квадрат 6×6 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник 1×4 и перекрасить все его клетки в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?

Решение.

Раскрасим диагональной раскраской в четыре цвета как на рисунке.

Получим 10 зелёных, 9 синих, 8 белых и 9 красных клеток.

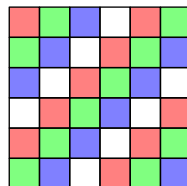
Количества синих и белых закрашенных клеток изначально одной чётности.

Каждым ходом перекрашиваются все клетки в каком-то прямоугольнике 1×4 .

Одна из синих клеток перекрашивается в другой цвет и одна из белых.

Поэтому количества синих и белых закрашенных клеток снова будет одной чётности.

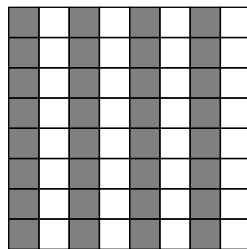
Значит, не получится закрасить 9 синих и 8 белых белую клетку в чёрный цвет.



8. Можно ли разрезать квадрат 2027×2027 на горизонтальные доминошки и вертикальные прямоугольниками 1×3 ?

Решение.

Раскрасим матрасной раскраской в два цвета как на рисунке. Тогда чёрных полос будет на одну больше чем белых. Поэтому чёрных клеток будет на 2027 больше чем белых. В каждой горизонтальной доминошке поровну чёрных и белых клеток. Вертикальные прямоугольники 1×3 содержат клетки одного цвета. Поэтому разность между количеством клеток разных цветов должна делиться на 3. Но 2027 на 3 не делится.



Решение.

Раскрасим матрасной раскраской в три цвета как на рисунке. Тогда красных и синих полос будет поровну и на одну больше чем белых. Поэтому красных и синих клеток будет на 2027 больше чем белых. В каждом вертикальном прямоугольнике 1×3 есть клетки всех трёх цветов. Горизонтальные доминошки содержат клетки одного цвета. Поэтому разность между количеством клеток двух разных цветов должна быть чётной. Но 2027 нечётно.

