

Десятичная запись числа

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называется *десятичной*. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего, старшего разряда. Например, десять единиц составляют один десяток, десять десятков — одну сотню и так далее. Число 2026 можно представить в виде суммы:

$$2026 = 2 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1.$$

Любое четырёхзначное число можно записать так $\overline{abcd}$. Черта над выражением означает, что это *десятичная запись числа*. То есть, что d — это цифра, обозначающая число единиц, c — цифра, обозначающая число десятков, b — цифра, обозначающая число сотен, a — ненулевая цифра, обозначающая число тысяч. Иначе говоря,

$$\overline{abcd} = a \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \cdot 1.$$

Аналогичным образом можно записать двузначные, трёхзначные, пятизначные числа и так далее. Любое натуральное число можно записать в виде $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, где a_0 — это цифра, обозначающая число единиц, a_1 — это цифра, обозначающая число десятков, $\dots$, a_n — ненулевая цифра, то есть

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1.$$

Задача 1

Докажите, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.

Решение.

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b) : 11.$$

Задача 2

Сумма цифр a и b делится на 7. Докажите, что число вида

(а) $\overline{aba}$;

(б) $\overline{aab0b}$ делится на 7.

Решение.

(а) $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 10b = 91a + 10(a + b) : 7$, так как $91 : 7$ и $(a + b) : 7$.

(б) $\overline{aab0b} = 11000a + 101b = 10899a + 101(a + b) : 7$, так как $10899 : 7$ и $(a + b) : 7$.

Задача 3

Найдите все (а) двузначные числа, (б) натуральные числа, которые в 5 раз больше суммы своих цифр.

Решение.

(а)

$$\overline{ab} = 5(a + b)$$

$$10a + b = 5a + 5b$$

$$5a = 4b$$

Поскольку a и b — цифры, то $b = 5$ и $a = 4$.

Ответ: 45.

(б) Рассмотрим случай трёхзначного числа

$$\overline{cab} = 5(c + a + b)$$

$$100c + 10a + b = 5c + 5a + 5b$$

$$95c + 5a = 4b$$

Но это невозможно, поскольку левая часть больше правой. В самом деле, a , b и c — цифры, поэтому $95c + 5a \geq 95 > 36 \geq 4b$.

Теперь рассмотрим случай четырёхзначного числа

$$\overline{dcab} = 5(d + c + a + b)$$

$$1000d + 100c + 10a + b = 5d + 5c + 5a + 5b$$

$$995d + 95c + 5a = 4b$$

Но это невозможно, поскольку левая часть больше правой. В самом деле, a , b , c и d — цифры, поэтому $995d + 95c + 5a \geq 995 > 36 \geq 4b$.

Далее видим, что чем больше знаков в числе, тем, в результате, больше становится левая часть, и поэтому она не может равняться правой.

$$\overline{\dots edcab} = 5(\dots + e + d + c + a + b)$$

$$\dots + 10\,000e + 1\,000d + 100c + 10a + b = \dots + 5e + 5d + 5c + 5a + 5b$$

$$\dots + 9\,995e + 995d + 95c + 5a = 4b$$

$$\dots + 9\,995e + 995d + 95c + 5a \geq \dots 9\,995 > 36 \geq 4b.$$