Графы 2

1. У некоторых марсиан по три руки. Могут ли семь таких марсиан взяться за руки?

2. У некоторых марсиан бывает три руки, а у некоторых — пять рук. Однажды несколько таких марсиан взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Могло ли количество таких марсиан быть равно 2027?

3. **Лемма о рукопожатиях.** У марсиан бывает любое количество рук. Однажды несколько марсиан взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что среди них количество марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

4. Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

5. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы
(a) каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?
(b) было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

6. В шахматном турнире участвовали 20 человек. Каждые два участника турнира сыграли между собой по одной партии. Сколько партий сыграл каждый участник? Сколько всего было сыграно партий?

7. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

8. **Теорема о сумме степеней вершин.** Докажите, что сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер (и следовательно, чётна).

9. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно покрасить в два цвета так, что никакие вершины одного цвета не были соединены ребром. Совокупность вершин одного цвета называется *долей*.

Удобно представлять такой граф следующим образом. Расположим все вершины одного цвета слева, а все вершины другого цвета — справа. Тогда каждое ребро будет соединять одну вершину слева с вершиной справа.

10. Пусть дан граф, в котором v вершин и r рёбер. Все его вершины покрасили в белый цвет, и в середину каждого ребра добавили чёрную вершину. Докажите, что получился двудольный граф. Сколько у него рёбер и сколько вершин каждого цвета?

11. Каждый из десяти гвардейцев кардинала Ришелье хоть раз вызывал на дуэль кого-нибудь из мушкетеров. Причём первый гвардеец бросал вызов на дуэль ровно один раз, второй гвардеец — ровно два раза, ..., десятый — ровно десять раз. Сколько могло быть мушкетеров, если известно, что каждый из них получал вызов на дуэль ровно пять раз?

12. **Теорема о количестве рёбер в двудольном графе.** Докажите, что в двудольном графе количеству рёбер равно сумме степеней вершин в каждой доле.