

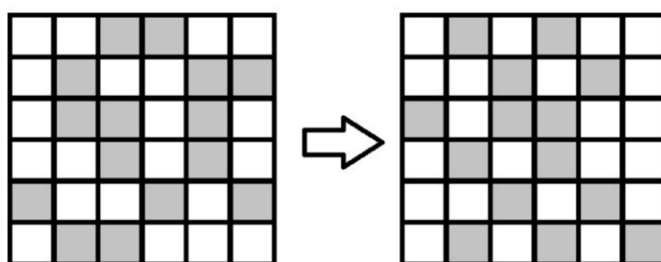
Инварианты

13 декабря 2025 • 5 класс, продвинутая группа

Инвариант – некоторая величина/свойство, которое не меняется при каждой операции/на каждом шаге. Частые инварианты: сумма/разность, четность чего-либо, делимость на некоторое число.

При сдаче необходимо четко формулировать, что именно является инвариантом в каждой задаче.

Задача 1. За одну операцию можно поменять местами два столбца или две строки. Можно ли за несколько операций получить из левой таблицы правую?



Задача 2. Числа 5, 11, 13, 17, 666, 1313 решили сразиться за титул самого страшного числа. У них есть следующие возможности:

- 1) Любое число может разбиться на два числа, сумма которых равна этому числу (например, число 17 может превратиться в числа 7 и 10);
- 2) Любые два числа могут объединиться в одно число, равное их сумме (например, числа 11 и 13 могут объединиться в число 24).

После ожесточенных боев осталось только одно число. Какое?

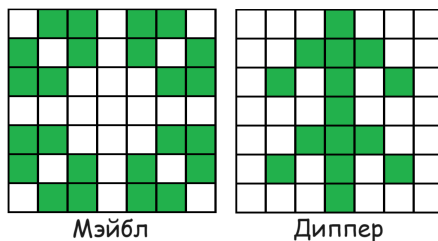
Задача 3. На доске написано число 1. С числом разрешается проводить две операции: умножать его на 2 и переставлять в нем цифры. Можно ли с помощью таких операций получить число 123456?

Задача 4. Даны три кучки, в каждой по 2025 камней. За один ход можно выбрать две кучки и убрать из них по одному камню, при этом добавив один камень в третью кучку. Можно ли действовать так, чтобы в итоге остался только один камень?

Задача 5. Дана шахматная доска 8×8 . Разрешается перекрашивать другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри любого квадрата 2×2 . Может ли при этом на доске остаться ровно одна чёрная клетка?

Задача 6. На окружности стоят 10 единиц. За одну операцию можно выбрать 4 подряд стоящих числа и из любого из них вычесть единицу, одновременно прибавив единицу к трём остальным. Можно ли несколькими такими операциями получить 10 чисел, равных 20?

Задача 7. Мэйбл и Диппер раскрашивают изначально белую доску 7×7 . Ходят по очереди, начинает Мэйбл. Каждый выбирает произвольные $4k + 1$ клеток (k – любое натуральное от 1 до 12) и перекрашивает белые в зеленый, а зеленые в белый. Мэйбл хочет, чтобы после её хода на доске оказалась белая снежинка, а Диппер – чтобы после его хода на доске оказалась зелёная ёлочка (см. рисунок). Кто побеждает при правильной игре?



Задача 8. На столе лежит много пустых тарелок и одна большая, в которой 2025 плюшек. Каждую минуту Карлсон выбирает тарелку, в которой больше одной плюшки, съедает из неё одну плюшку, а затем перекладывает из какой-то тарелки несколько плюшек (не все!) в пустую. Через некоторое время Карлсон наелся, убрал все пустые тарелки и улетел. Могло ли после этого остаться в каждой тарелке по 6 плюшек?