

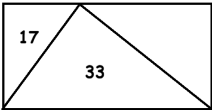
Программа зачёта

Конструктивы с числами

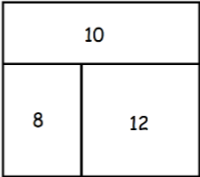
- 1. Миллионер Корейко купил у Остапа Бендера компрометирующую его расписку и получил причитающуюся ему сдачу; при этом использовались купюры только в 63 и 350 тугриков. Какую наименьшую сумму могла стоить расписка?
- 2. На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?
- 3. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких *различных* букв. Например, если спросить « $A + B = ?$ », то в случае, когда $A = 9, B = 1, C = 0$, ответом будет « $A + B = BC$ ». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?

Периметры и площади

- 4. Серёжа разрезал прямоугольник на три треугольника и подписал площади двух из них в квадратных сантиметрах (см. рисунок). Чему равна площадь третьего?
- 5. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.
- 6. Квадрат разбили на три прямоугольника как показано на рисунке. Их периметры равны 8, 10, 12 см. Найдите периметр квадрата.



30		?
21	35	
	10	8



Оценка + Пример

7. Какое наибольшее число **а)** ладей, **б)** королей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы ни одна фигура не била ни одну другую?
8. Клетки доски 8×8 покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Оказалось, что в любом трёхклеточном уголке красных клеток больше, чем синих. Найдите наибольшее возможное число синих клеток.
9. В 5 горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил 3 килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни-Пух?

Знакомство с графами

10. Можно ли расставить числа $1, 2, \dots, 8, 9$ по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?
11. Докажите, что в любом графе (у которого не менее двух вершин) найдутся две вершины одинаковой степени.
12. Можно ли придумать такую доску, что из некоторых её клеток конь может обойти все её клетки ровно по одному разу и вернуться назад, из других — может обойти все её клетки ровно по одному разу, но вернуться назад не сможет, а из третьих — не сможет даже просто обойти все клетки доски ровно по одному разу. А только клетки последних двух типов?

Графы 2

13. Пять человек играли в шахматы (каждый сыграл хотя бы одну игру). Только Петя и Вася сыграли одинаковое число игр, а все остальные — различное. Сколько игр сыграли Петя и Вася?
14. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц (улицы соединяют площади). Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.
15. В связном графе степени каждой вершины равны 4. Докажите, что если в нём удалить одно ребро то он останется связным.

Комбинаторика

16. Сколько существует трехзначных чисел, в которых все цифры нечётны?
17. В классе учатся 15 мальчиков и 13 девочек. В начале учебного года проводятся выборы. Сначала выбирают старосту класса (им может стать любой ученик). Затем староста выбирает себе заместителя из одноклассников того же пола (мальчик – мальчика, девочка – девочку). Сколько различных итогов может быть у этих выборов?
18. Найдите количество раскрасок клеток квадрата 3×3 в 5 цветов, при которых во всех строках, столбцах и двух главных диагоналях цвета клеток не повторяются (квадрат фиксирован, не поворачивается и не переворачивается).

Комбинаторика 2

19. Аня забыла пароль от своего телефона. Она помнит лишь, что он состоит из четырех цифр, и что хотя бы одна из них находится в верхней строчке (то есть, равна 1, 2 или 3). Сколько вариантов паролей придётся перебрать бедной Ане, чтобы гарантированно разблокировать телефон?
20. Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?
21. Найдите количество способов расставить 8 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей.

Подсчёт двумя способами

22. Некоторые клетки таблицы 6×6 покрасили в черный цвет. Могло ли так оказаться, что в каждом квадрате 2×2 закрашено две клетки, а в каждом прямоугольнике 1×3 — одна?
23. Девочки и мальчики играли в снежки. Каждая девочка запустила 12 снежков, а каждый мальчик — 19 снежков. В итоге оказалось, что в каждую девочку прилетело по 15 снежков, а в каждого мальчика — по 17 снежков (каждый снежок попал в цель). Кого было больше, мальчиков или девочек?
24. Про группу из пяти человек известно, что:
 - Алеша на 1 год старше Алексеева,
 - Боря на 2 года старше Борисова,
 - Вася на 3 года старше Васильева,
 - Гриша на 4 года старше Григорьева.

А еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

Принцип узких мест

25. В цирке 10 силачей вынесли на арену на руках по циркачке, каждая легче того, кто её нёс. Потом эти циркачки унесли с арены каждая по силачу. Могло ли случиться что каждая циркачка несла силача легче себя?
26. Можно ли разрезать правильный 6-угольник на 12 треугольников так, чтобы каждый треугольник имел общий отрезок границы ровно с 3 другими треугольниками?
27. Квадрат 10×10 сложен из домино 1×2 . Может ли в нем не быть квадратов 2×2 , составленных из двух доминошек?

Принцип крайнего

28. По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не меньше одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.
29. Из натуральных чисел от 1 до 70 удалили 7 чисел. Обязательно ли среди оставшихся можно найти 7 чисел с суммой 70?
30. На военном полигоне сидит 2025 снайперов. Каждый снайпер целится в ближайшего к нему снайпера (все расстояния между снайперами различны). Докажите, что в одного из снайперов никто не целится.

Делимость

31. Найдите наименьшее простое число, которое можно получить, сложив пять различных простых чисел.
32. Нескольким зверюшкам раздали 210 долек апельсина. Выяснилось, что зайчику досталось меньше всех долек, и остальные зверюшки передали по одной своей дольке зайчику. После этого у всех зверей стало ровно по x долек. Найдите максимально и минимально возможное значение x .
33. Существует ли решение у ребуса $ОСЫ \cdot ЕЛИ \cdot МЁД = **000000$?
(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые, а звёздочками — любые.)

Признаки делимости

34. Докажите, что число $\overline{abcd dcba}$ — составное.
35. Число $\overline{54XY2}$ делится на 36. Найти его цифры X и Y .
36. Взяли число 2027! и вычислили сумму его цифр, у полученного числа снова вычислили сумму его цифр и так далее до тех пор, пока не получилось однозначное число. Найдите это однозначное число.

Десятичная запись числа

37. Решите ребус $AB - BA = A$.
38. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.
39. Игорь записал на каждой из трёх карточек по одной цифре, отличной от нуля. Катя составила из них все возможные трёхзначные числа. Может ли сумма этих чисел равняться 2026?

Инварианты

40. На доске написано число 1. С числом разрешается проводить две операции: умножать его на 2 и переставлять в нем цифры. Можно ли с помощью таких операций получить число 123456?
41. Даны три кучки, в каждой по 2026 камней. За один ход можно выбрать две кучки и убрать из них по одному камню, при этом добавив один камень в третью кучку. Можно ли действовать так, чтобы в итоге остался только один камень?
42. На окружности стоят 10 единиц. За одну операцию можно выбрать 4 подряд стоящих числа и из любого из них вычесть единицу, одновременно прибавив единицу к трём остальным. Можно ли несколькими такими операциями получить 10 чисел, равных 20?