

Чётность и чередование

Задача 1

(а) 100 чёрных квадратов и несколько белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались (см. рис.). Первым расположен чёрный квадрат, а последним — белый треугольник. Сколько белых треугольников?



(б) 100 чёрных квадратов и несколько белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались (см. рис.). Первым и последним расположены чёрные квадраты. Сколько белых треугольников?



(с) А если квадраты и треугольники были расположены не в ряд, а по кругу?

Решение:

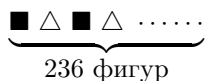
(а) Справа от каждого квадрата есть треугольник. Поэтому треугольников столько же, сколько и квадратов, то есть 100.

(б) Справа от каждого квадрата, кроме последнего, есть треугольник. Поэтому треугольников на один меньше, чем квадратов, то есть 99.

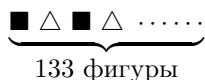
(с) Справа от каждого квадрата есть треугольник. Поэтому треугольников столько же, сколько и квадратов, то есть 100.

Задача 2

(а) Несколько чёрных квадратов и белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались. Первым расположен чёрный квадрат (см. рис.). Сколько чёрных квадратов и белых треугольников, если всего фигур 236?



(б) Несколько чёрных квадратов и белых треугольников расположили в ряд так, чтобы они чередовались. Первым расположен чёрный квадрат (см. рис.). Сколько чёрных квадратов и белых треугольников, если всего фигур 133?



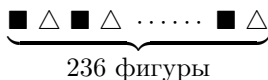
Решение:

По предыдущей задаче мы знаем, что треугольников либо столько же, сколько квадратов, либо их на один меньше.

(а)

$$236 : 2 = 118$$

Значит, квадратов и треугольников поровну, по 118 штук.



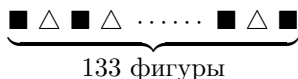
(б)

$$133 : 2 = 66 \text{ (ост. 1)}$$

Значит, квадратов и треугольников поровну быть не может.

Тогда треугольников на один меньше, чем квадратов.

Квадратов 67 штук, а треугольников 66 штук.



Чётность и чередование

Идея 1

Если в ряд лежат предметы двух видов чередуясь, то

- первый и последний предметы разного вида, если всего предметов чётное количество;



- первый и последний предметы одного вида, если всего предметов нечётное количество.



Задача 3

Вдоль забора растут восемь кустов малины.

Число ягод на соседних кустах отличается на единицу.

Может ли на всех кустах быть вместе 2025 ягод?

Решение:

На соседних кустах количество ягод разной чётности.

Поэтому «чётные» и «нечётные» кусты чередуются.

Всего кустов чётное количество.

Значит, там 4 куста с чётным количеством ягод и 4 куста с нечётным количеством ягод.

Но тогда сумма всех ягод чётна, а 2025 — нечётное число.

Задача 4

Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 2025 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение:

После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго — на земле, после третьего — на камне, и так далее...

Его положения на камне и на земле чередуются:

на камне, на земле, на камне, на земле

Положений было нечётное количество, значит после 2025 прыжка, он окажется на камне.

на камне, на земле, на камне, на земле, на камне, на земле, на камне

Чётность и чередование

Идея 2

Если в задаче присутствует *процесс* и некоторая величина, которая принимает ровно два значения (например Ч и Н), и на каждом шаге этого *процесса* величина поочерёдно принимает эти значения, то

- на каждом чётном шаге этого процесса величина принимает то же значение, что и в начале,
- на каждом нечётном шаге этого процесса величина принимает противоположное значение тому, которое было в начале.

		1	2	3	4	5	...	...
Ч		Н	Ч	Н	Ч	Н	...	...
Н		Ч	Н	Ч	Н	Ч	...	...

Задача 5

Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава на камень и обратно. Но через полчаса ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 2025 раз перепрыгнул через бедное животное. Докажите, что он заблуждается.

Решение:

После первого прыжка кролик оказался на камне, после второго — на земле, после третьего — на камне, и так далее...

Его положения на камне и на земле чередуются.

Значит, каждый нечётный прыжок кролик делал на камень.

Поэтому после 2025 прыжка он окажется снова на камне.

Задача 6

В сундуке лежит 20 колпаков. 17 гномов по очереди подходят к сундуку, и каждый либо снимает свой колпак и кладёт в сундук, либо берёт из сундука один колпак. Могло ли после ухода всех гномов в сундуке остаться ровно 10 колпаков?

Решение:

Изначально колпаков чётно в сундуке.

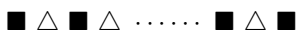
После каждого гнома чётность колпаков меняется.

Значит, после 17 гномов она будет противоположной от изначальной.

Чётность и чередование

Идея 3

- Нечётное количество предметов двух видов нельзя расположить по кругу так, чтобы они чередовались. (Если попробуем их так расположить по кругу, то первый и последний предмет будут одного вида, и поэтому такой круг не замкнётся, см. рисунок ниже.)



- Если по кругу лежат предметы двух видов чередуясь, то этих предметов обязательно чётное количество и предметов обоих видов поровну.

Задача 7

В плоскости расположено 11 шестерёнок таким образом, что первая сцеплена со второй, вторая — с третьей, ..., одиннадцатая — с первой. Могут ли они вращаться?



Решение:

Посмотрим на вращение шестерёнок.

Соседние две вращаются в разные стороны.

Но их всего нечётное количество.

Задача 8

По кругу написано семь натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

Решение:

Числа бывают двух видов: чётные и нечётные.

Поскольку всего чисел нечётное количество, то чередоваться они не могут.

Значит, есть два соседних одной чётности, а их сумма чётна.

Задача 9

Ученица 5 класса Маша и несколько её одноклассников встали в круг, взявшись за руки. Оказалось, что каждый держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек. Если в кругу стоит пять мальчиков, то сколько там стоит девочек?

Решение:

Если Маша держит за руки двух девочек, тогда в кругу все девочки.

По условию есть как мальчики, так и девочки.

Значит, Маша держит за руки двух мальчиков, мальчики и девочки чередуются и их поровну.