

Графы 2

21 марта 2026

Лемма о рукопожатиях. В любом графе количество вершин нечётной степени чётно.

Теорема о сумме степеней вершин. В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер (и следовательно, чётна).

Обсуждаются на семинаре

1. Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть (а) 35 игр; (b) 56 игр; (c) 34 игры?
2. В государстве каждый город соединён авиалиниями ровно с пятью другими городами.
(a) Нарисуйте схему авиалиний для государства из 10 городов.
(b) Сколько авиалиний в государстве из 50 городов?
(c) Может ли существовать государство, в котором ровно 46 авиалиний?
3. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Основные задачи

4. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц (улицы соединяют площади). Докажите, что
(a) число площадей чётно,
(b) число улиц делится на 5.
5. После занятий в школе 10 одноклассников решили поиграть в снежки. Известно, что каждый школьник кинул снежок 5 раз, при этом каждый раз в разных людей. Докажите, что есть 2 одноклассника, которые кинули снежки друг в друга.
(Решите эту задачу, предварительно переформулировав её на язык графов. Одноклассникам будут соответствовать вершины. Какие вершины будут соединены ребром?)
6. В связном графе степени каждой вершины равны 4. Докажите, что если в нём удалить одно ребро то он останется связным.
7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Письменные задачи

8. Пять человек играли в шахматы (каждый сыграл хотя бы одну игру). Только Петя и Вася сыграли одинаковое число игр, а все остальные — различное. Сколько игр сыграли Петя и Вася?
9. На острове живут лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Каждый из них сделал по два заявления:
- 1) «Среди моих друзей — нечётное количество рыцарей»;
 - 2) «Среди моих друзей — чётное количество лжецов».
- Чётно или нечётно количество жителей острова?