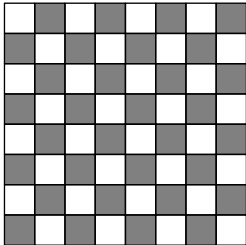


Шахматная раскраска

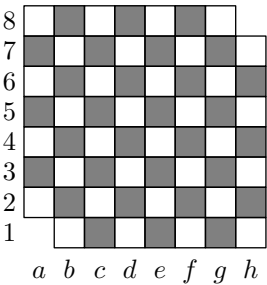


Задача 1

Из шахматной доски вырезали две клетки $a1$ и $h8$. Можно ли то, что осталось, разрезать на доминошки (доминошки — это прямоугольники размером 1×2)?

Решение.

Обе вырезанные клетки чёрные (см. рис.).
Поэтому осталось 32 белые и 30 чёрных клеток.
А в каждой доминошке должна быть одна клетка белая и одна чёрная.

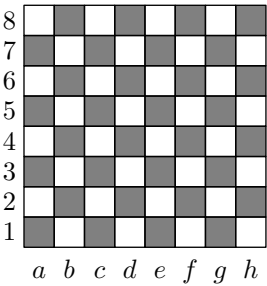


Задача 2

Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное количество ходов.

Решение.

При каждом ходе конь меняет цвет клетки, на которой стоит: с белой на чёрную и с чёрной на белую.
Происходит чередование цвета клеток при каждом ходе.
Значит, оказаться на клетке того же цвета, что и изначально, можно только через чётное количество ходов.



Задача 3

Шахматный конь долго и упорно изучал магию, в результате чего освоил-таки заклинание «Телепорт», которое после каждого хода мгновенно перемещает его в клетку, симметричную данной относительно вертикальной оси симметрии шахматной доски (например, из левого верхнего угла — в правый верхний). Сможет ли он добраться из левого нижнего угла хотя бы в одну из соседних по стороне клеток?

Решение.

При каждом ходе обычный шахматный конь меняет цвет клетки, на которой стоит: с белой на чёрную и с чёрной на белую.

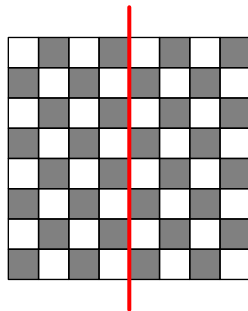
При «телепортации» также происходит смена цвета клетки: с чёрного на белый и с белого на чёрный.

Значит, за ход конь дважды поменял цвет клетки и вновь оказался на клетке того же цвета, с которого начинал ходить.

Поэтому, конь всегда оказывается на клетках одного и того же цвета.

Но левая нижняя клетка чёрного цвета, а клетки, соседние с ней по стороне — белого.

Поэтому конь не сможет добраться ни в одну из них.



Задача 4

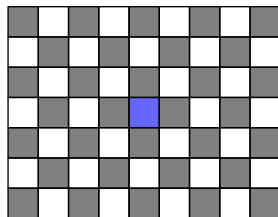
Замок имеет вид прямоугольника размером 7×9 клеток. Каждая клетка, кроме центральной — комната замка, а в центральной клетке находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Решение.

Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке. Тогда чёрных клеток будет 32, а белых 30.

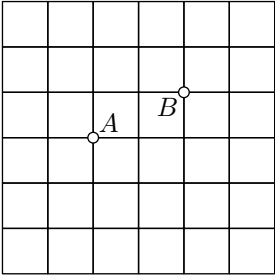
При переходе из одной клетки (комнаты) в другую меняется её цвет, происходит чередование цвета клеток.

Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.

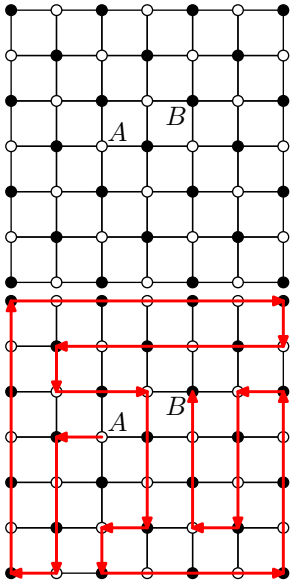


Задача 5

Турист находится в точке A и хочет прогуляться до точки B (см. рис.). Он может ходить только по линиям сетки и хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться в одном и том же месте ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.

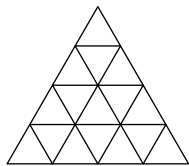


Решение.
Длина маршрута будет на 1 меньше количество посещённых узлов, потому что узлы и единичные отрезки вдоль маршрута чередуются, а начало и конец в узлах. Всего узлов 49, но все их посетить не получится. Раскрасим узлы в шахматном порядке. Начинаем в белом узле, а заканчиваем в чёрном, при этом чередуя цвета узлов вдоль маршрута. Значит, получится посетить лишь чётное количество узлов, то есть не более 48. Пример как побывать в 48 узлах указан на рисунке. Длина маршрута в этом случае составит 47 единичных отрезков.



Задача 6

Треугольник со стороной 4 разделили на 16 треугольников со стороной 1 (см. рис.). Можно ли большой треугольник разрезать по линиям сетки на 8 ромбиков (каждый ромбик состоит из двух треугольников со стороной 1)?

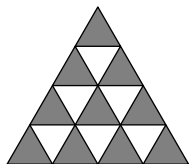


Решение.

Раскрасим маленькие треугольники в шахматном порядке (см. рис.).

Получилось 6 белых и 10 чёрных треугольников.

А в каждом ромбике должен быть один белый треугольник и один чёрный.



Задача 7

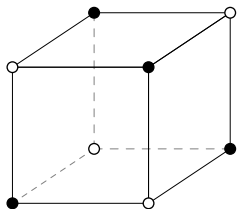
Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

Решение.

Раскрасим вершины проволочного куба в шахматном порядке (см. рис.).

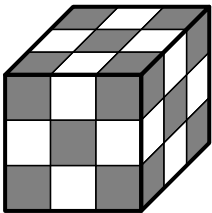
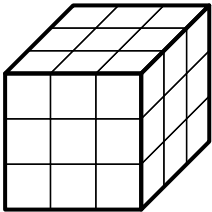
При переползании из одной вершины в соседнюю меняется цвет, происходит чередование цветов вершин.

Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.



Задача 8

Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?



Решение.

Раскрасим маленькие кубики в шахматном порядке (см. рис.). Тогда чёрных кубиков будет 14, а белых 12. При последовательном съедании мышью одного кубика за другим меняется его цвет, происходит чередование цвета кубиков. Но это возможно только если их количество отличается не более, чем на 1.

Задача 9

Можно ли расставить 16 чисел: 5, 15, 25, 35 и т.д. (каждое следующее на 10 больше предыдущего) в таблице 4×4 так, чтобы разность каждых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, не делилась на 4?

Решение.

Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке (см. рис.). Два числа с разностью 20, 40, 60, ..., рядом ставить нельзя, поставим все такие числа в белые клетки, а все остальные — в чёрные. Пример готов.

5		25	
	45		65
85		105	
	125		145

5	15	25	35
55	45	75	65
85	95	105	115
135	125	155	145