

Признаки делимости

Признак делимости на 10

Натуральное число A делится на 10 $\Leftrightarrow$ его последняя цифра равна 0.

Доказательство.

$$2020 = 202 \cdot 10$$

$$\overline{abc0} = \overline{abc} \cdot 10$$

$$\overline{\dots abc0} = \overline{\dots abc} \cdot 10$$

Признак делимости на 2

Натуральное число A делится на 2 $\Leftrightarrow$ его последняя цифра делится на 2.

Доказательство.

$$2026 = \underbrace{2020}_{:2} + 6 \quad (2020 : 10, \quad 10 : 2)$$

$$202* = \underbrace{2020}_{:2} + *$$

$$\overline{abcd} = \underbrace{\overline{abc0}}_{:2} + d \quad (\overline{abc0} : 10, \quad 10 : 2)$$

$$\overline{\dots abcd} = \underbrace{\overline{\dots abc0}}_{:2} + d$$

Признак делимости на 5

Натуральное число A делится на 5 $\Leftrightarrow$ его последняя цифра делится на 5.

Доказательство.

$$\overline{\dots abcd} = \underbrace{\overline{\dots abc0}}_{:5} + d \quad (\overline{\dots abc0} : 10, \quad 10 : 5)$$

Признак делимости на 100

Натуральное число A делится на 100 $\Leftrightarrow$ его последние две цифры равны 0.

Доказательство.

$$\overline{\dots abc00} = \overline{\dots abc} \cdot 100$$

Признак делимости на 4

Натуральное число A делится на 4 $\Leftrightarrow$ число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4.

Доказательство.

$$\overline{\dots abcd} = \underbrace{\overline{\dots ab00}}_{:4} + \overline{cd} \quad (\overline{ab00} : 100, \quad 100 : 4)$$

Признак делимости на 25

Натуральное число A делится на 25 $\Leftrightarrow$ число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 25.

Доказательство.

$$\overline{\dots abcd} = \underbrace{\overline{\dots ab00}}_{:25} + \overline{cd} \quad (\overline{\dots ab00} : 100, \quad 100 : 25)$$

Признак делимости на 8

Натуральное число A делится на 8 $\Leftrightarrow$ число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8.

Доказательство.

$$\overline{\dots abcd} = \underbrace{\overline{\dots a000}}_{:8} + \overline{bcd} \quad (\overline{a000} : 1000, \quad 1000 : 8)$$

Признаки делимости на 3 и на 9

Натуральное число A делится на 3 $\Leftrightarrow$ сумма всех его цифр делится на 3.

Натуральное число A делится на 9 $\Leftrightarrow$ сумма всех его цифр делится на 9.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 2457 &= 2000 + 400 + 50 + 7 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 = \\
 &= 2 \cdot (999 + 1) + 4 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 7 = (2 \cdot 999 + 2) + (4 \cdot 99 + 4) + (5 \cdot 9 + 5) + 7 = \\
 &= \underbrace{(2 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9)}_{:3 \text{ и } :9} + (2 + 4 + 5 + 7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{abcd} &= a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a \cdot (999 + 1) + b \cdot (99 + 1) + c \cdot (9 + 1) + d = \\
 &= (a \cdot 999 + a) + (b \cdot 99 + b) + (c \cdot 9 + c) + d = \underbrace{(a \cdot 999 + b \cdot 99 + c \cdot 9)}_{:3 \text{ и } :9} + (a + b + c + d)
 \end{aligned}$$

$$\overline{\dots abcd} = \dots$$

Признак делимости на 11

Натуральное число A делится на 11 $\Leftrightarrow$ разность суммы цифр, стоящих на чётных местах, и суммы цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 274835 &= 2 \cdot 100\,000 + 7 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = \\
 &= 2 \cdot (100\,001 - 1) + 7 \cdot (9\,999 + 1) + 4 \cdot (1001 - 1) + 8 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (11 - 1) + 5 = \\
 &= (2 \cdot 100\,001 - 2) + (7 \cdot 9\,999 + 7) + (4 \cdot 1001 - 4) + (8 \cdot 99 + 8) + (3 \cdot 11 - 3) + 5 = \\
 &= \underbrace{(2 \cdot 100\,001 + 7 \cdot 9\,999 + 4 \cdot 1001 + 8 \cdot 99 + 3 \cdot 11)}_{:11} - 2 + 7 - 4 + 8 - 3 + 5
 \end{aligned}$$