Десятичная запись числа

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называется *десятичной*. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего, старшего разряда. Например, десять единиц составляют один десяток, десять десятков — одну сотню и так далее. Число 2026 можно представить в виде суммы:

$$2026 = 2 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1.$$

Любое четырёхзначное число можно записать так $\overline{abcd}$. Черта над выражением означает, что это *десятичная запись числа*. То есть, что d — это цифра, обозначающая число единиц, c — цифра, обозначающая число десятков, b — цифра, обозначающая число сотен, a — ненулевая цифра, обозначающая число тысяч. Иначе говоря,

$$\overline{abcd} = a \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d \cdot 1.$$

Аналогичным образом можно записать двузначные, трёхзначные, пятизначные числа и так далее. Любое натуральное число можно записать в виде $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, где a_0 — это цифра, обозначающая число единиц, a_1 — это цифра, обозначающая число десятков, $\dots$, a_n — ненулевая цифра, то есть

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1.$$

Задача 1

Докажите, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.

Решение.

$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b) \vdots 11$.

Задача 2

Сумма цифр a и b делится на 7. Докажите, что число вида
(a) $\overline{aba}$;
(b) $\overline{aab0b}$ делится на 7.

Решение.

(a) $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 10b = 91a + 10(a + b) \vdots 7$, так как $91 \vdots 7$ и $(a + b) \vdots 7$.

(b) $\overline{aab0b} = 11000a + 101b = 10899a + 101(a + b) \vdots 7$, так как $10899 \vdots 7$ и $(a + b) \vdots 7$.

Задача 3

Найдите все **(a)** двузначные числа, **(b)** натуральные числа, которые в 5 раз больше суммы своих цифр.

Решение.

(a)

$$\begin{aligned} \overline{ab} &= 5(a+b) \\ 10a+b &= 5a+5b \\ 5a &= 4b \end{aligned}$$

Поскольку a и b — цифры, то $b=5$ и $a=4$.

Ответ: 45.

(b) Рассмотрим случай трёхзначного числа

$$\begin{aligned} \overline{cab} &= 5(c+a+b) \\ 100c+10a+b &= 5c+5a+5b \\ 95c+5a &= 4b \end{aligned}$$

Но это невозможно, поскольку левая часть больше правой. В самом деле, a, b и c — цифры, поэтому $95c+5a \geqslant 95 > 36 \geqslant 4b$.

Теперь рассмотрим случай четырёхзначного числа

$$\begin{aligned} \overline{dcab} &= 5(d+c+a+b) \\ 1000d+100c+10a+b &= 5d+5c+5a+5b \\ 995d+95c+5a &= 4b \end{aligned}$$

Но это невозможно, поскольку левая часть больше правой. В самом деле, a, b, c и d — цифры, поэтому $995d+95c+5a \geqslant 995 > 36 \geqslant 4b$.

Далее видим, что чем больше знаков в числе, тем, в результате, больше становится левая часть, и поэтому она не может равняться правой.

$$\begin{aligned} \overline{\ldots edcab} &= 5(\cdots+e+d+c+a+b) \\ \cdots+10\,000e+1\,000d+100c+10a+b &= \cdots+5e+5d+5c+5a+5b \\ \cdots+9\,995e+995d+95c+5a &= 4b \end{aligned}$$

$\cdots+9\,995e+995d+95c+5a \geqslant \ldots 9\,995 > 36 \geqslant 4b$.